Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Primer Parcial (01/10/2022) - 2do. cuatrimetre 2022

TEMA 4

1 (2 pts.)	2 (3 pts.)	3 (2,5 pts.)	4 (2,5 pts.)	Nota
B	B⁻	B⁻	B	9,25

Apellido: .
Nombre:

Nro. de libreta: .
Carrera: Lic Computación

Nro de práctica: 1.

1. Sea C la curva que se obtiene al intersecar las superficies:

$$(y-1)^2+z^2=9 \text{ y } x+y+z=2.$$

(a) Hallar una parametrización de C.

(b) Hallar la ecuación paramétrica de la recta tangente a C en el punto $P=(-2,1,3)$.

---

2. Analizar la existencia de los siguientes límites. Si existen dar su valor.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,2)} \frac{(y-2)\sin^2(x+2)}{(x+2)^2+(y-2)^2}$;

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\sqrt{|y|}\,(x-4)(x+1)}{(x-4)^2+y}$.

---

3. Estudiar la diferenciabilidad en **todo punto** de $\mathbb{R}^2$ para

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^3-x^4}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0); \\ 0 & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

---

4. Sean $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferenciable, $\mathbf{u}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ y $\mathbf{v}=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$. Sabiendo

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(1,-1)=3,\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,-1)=0 \ \text{ y } \lim_{t\to 2} f(t^3-3t-1,e^{t-2}-t)=-8.$$

(a) Hallar $\nabla f(1,-1)$.

(b) Hallar el plano tangente al gráfico de

$$g(s,t)=f\left(s^2+t^2,t^2(s+1)-e^t\right)$$

en el punto $(1,0,g(1,0))$.

Escribir todos los razonamientos que justifican las respuestas.

1) $\underbrace{(y-1)^2 + z^2 = 9}$ y $\underbrace{x + y + z = 2}$

circunf. de centro $(1,0)$ y $r = 3$ → Es una circunferencia en el plano yz. En $\mathbb{R}^3$ es un cilindro

plano

parametrizo la 1° ecuación

$y = 3\cos t + 1$

$z = 3\operatorname{sen} t$

Despejo "x" de la 2da ec.

$x = 2 - y - z$

luego reemplazo las variables por la 1° ec.

$x = 2 - 3\cos t - 1 - 3\operatorname{sen} t$

$x = 1 - 3\cos t - 3\operatorname{sen} t$

Entonces tengo que

RTA 1,a) $\boxed{r(t) = (1 - 3(\cos t + \operatorname{sen} t),\ 3\cos t + 1,\ 3\operatorname{sen} t)}$

b) Verifico para que t, $P = (-2,1,3) \in r(t)$

$$r(t) = \begin{cases} 1 - 3(\cos t + \operatorname{sen} t) = -2 \\ 3\cos t + 1 = 1 \\ 3\operatorname{sen} t = 3 \end{cases} \iff \boxed{t = \frac{\pi}{2}}$$

Luego tengo que la ec. param. de la rta. tangente es

$L: \lambda r'(t) + r(t)$

$r'(t) = (3\operatorname{sen} t - 3\cos t,\ -3\operatorname{sen} t,\ 3\cos t)$

y $r'(\frac{\pi}{2}) = (3, -3, 0)$

Luego $\boxed{L: \lambda(3,-3,0) + (-2,1,3)}$ RTA

2) a) $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,2)} \dfrac{(y-2)\sin^2(x+2)}{(x+2)^2+(y-2)^2} = \dfrac{0}{0}$

Por iterados:

$$\lim_{x\to-2}\left(\lim_{y\to2} \frac{(y-2)\sin^2(x+2)}{(x+2)^2+(y-2)^2}\right) = \lim_{x\to-2} \frac{0}{(x+2)^2} = \lim_{x\to2} 0 = \boxed{0}$$

$$\lim_{y\to2}\left(\lim_{x\to-2} \frac{(y-2)\sin^2(x+2)}{(x+2)^2+(y-2)^2}\right) = \lim_{y\to2} \frac{0}{(y-2)^2} = \lim_{y\to2} 0 = \boxed{0}$$

Me dice que si el limite existe entonces debe ser 0

Pruebo con $y = x+4$

$$\lim_{x\to-2} \frac{(x+4-2)\sin^2(x+2)}{(x+2)^2+(x+4-2)^2} = \lim_{x\to-2} \frac{(x+2)\sin^2(x+2)}{2(x+2)^2}$$

$$= \lim_{x\to-2} \frac{(x+2)}{2} \cdot \left(\underbrace{\frac{\sin(x+2)}{x+2}}_{\text{tiende a } 1}\right)^2 = \lim_{x\to-2} \frac{(x+2)}{2} = \frac{-2+2}{2} = \boxed{0}$$

Entonces tomo como candidato a limite "0" y lo pruebo:

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$ tq si $0<\|(x,y)-(-2,2)\|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-0|<\varepsilon$

$$\left|\frac{(y-2)\sin^2(x+2)}{(x+2)^2+(y-2)^2}\right| = \frac{|(y-2)|\,|\sin^2(x+2)|}{\|(x+2,y-2)\|^2} \leq$$

acotacion seno

$|\sin(x+2)| \leq |x+2|$ ¡ojo!

$(\sin(x+2))^2 \leq (x+2)^2$

$|(x+2)^2| \leq \|x+2,y-2)\|^2$

$$\frac{|(y-2)|\,|(x+2)^2|}{\|(x+2,y-2)\|^2}$$

$$\leq \frac{|(y-2)|\,\cancel{\|(x+2,y-2)\|^2}}{\cancel{\|(x+2,y-2)\|^2}}$$

$$= |(y-2)| \xrightarrow[y\to2]{} 0$$

$\Rightarrow$ Por Sandwich, el limite existe y vale 0

RTA

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} \dfrac{\sqrt{|y|}\,(x-4)(x+1)}{(x-4)^2+y} = \dfrac{0}{0}$

Analizo iterados

$\lim\limits_{x\to 4}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sqrt{|y|}\,(x-4)(x+1)}{(x-4)^2+y}\right) = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{0}{(x-4)^2} = \lim\limits_{x\to 4} 0 = \boxed{0}$ ✓

$\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{|y|}\,(x-4)(x+1)}{(x-4)^2+y}\right) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{y} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = \boxed{0}$ ✓

Sus iterados me dicen que si el limite existe entonces debe ser $\boxed{0}$ ✓

~~Reemplazo por~~ Pruebo con $x = \sqrt{|y|}+4$

$\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sqrt{|y|}\cdot(\sqrt{|y|}+\cancel{4}-\cancel{4})(\sqrt{|y|}+4+1)}{(\sqrt{|y|}+\cancel{4}-\cancel{4})^2+y} =$

$\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\cancel{\sqrt{|y|}}\cdot\cancel{\sqrt{|y|}}\cdot(\sqrt{|y|}+5)}{(\cancel{\sqrt{|y|}})^{\cancel{2}}+y} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{|y|\cdot(\sqrt{|y|}+5)}{\cancel{|}y\cancel{|}+y}$

¡Ojo!

saco modulo

los dos son positivos

a priori, y no es positivo! Podrías tomar $y\to 0^+$!

$= \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\cancel{y}\cdot(\sqrt{y}+5)}{2\cancel{y}} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sqrt{y}+5}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{0}+5}{2} = \boxed{\dfrac{5}{2}} \neq 0$ Como el limite por esta recta es distinto de 0 (lo que indica los iterados)

curva!

$\Rightarrow \boxed{\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} f(x,y)}$ RTA

3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^4}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Analizo las derivadas parciales

• $f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - \overset{=0}{f(0,0)}}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{0^3 - h^4}{\cancel{\sqrt{h^2+0^2}}}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{-h^{\cancel{4}}}{\underset{|h|\cdot h}{\cancel{h^2}}}$ ¡ojo! $= \lim_{h\to 0} -h^2 = \boxed{0}$

• $f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(0,h)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{h^3 - 0^4}{\cancel{\sqrt{0^2+h^2}}}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h^{\cancel{3}}}{\underset{|h|\cdot h}{\cancel{h^2}}} = \lim_{h\to 0} h = \boxed{0}$

$\Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0)$

Para que f sea dif. en (0,0) necesito que el límite.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \overset{=0}{f(0,0)} - \overset{=0}{\nabla f(0,0)}\cdot(x-0, y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$ ✓

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{y^3-x^4}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3-x^4}{x^2+y^2} \overset{?}{=} 0$$ ✓

Veamos si existe:

Por iterados

$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \dfrac{y^3-x^4}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \dfrac{-x^{\cancel{4}}}{\cancel{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x^2 = \boxed{0}$ ✓

$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \dfrac{y^3-x^4}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \dfrac{y^{\cancel{3}}}{\cancel{y^2}} = \lim_{y\to 0} y = \boxed{0}$ ✓

veo la existencia, con candidato a límite $= 0$ | HOJA 3

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq si $0 < \|(x,y)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon$

$$\left| \frac{y^3 - x^4}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|y|^3 + |x|^4}{\|(x,y)\|^2} \leq \frac{\|(x,y)\|^3 + \|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^2}$$

$$= \frac{\cancel{\|(x,y)\|^2}\left(\|(x,y)\| + (\|(x,y)\|)^2\right)}{\cancel{\|(x,y)\|^2}}$$

$$= \|(x,y)\| + (\|(x,y)\|)^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Por Sandwich el límite existe y vale 0. ✓

Por lo tanto f es diferenciable y continua en $(0,0)$.

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ es diferenciable en todo pto en } \mathbb{R}^2}$

¡No probaste esto! Solo probaste que f es diferenciable en $(0,0)$. Falta ver qué pasa en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

~~pues f es continua siempre para~~

4) $u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ y $v = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1,-1) = 3, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(1,-1) = 0$$

$$\lim_{t \to 2} f(\underbrace{t^3 - 3t - 1}_{x}, \underbrace{e^{t-2} - t}_{y}) = -8$$

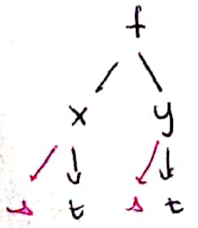
a) Hallar $\nabla f(1,-1)$

$$\lim_{t \to 2} f(2^3 - 3\cdot 2 - 1, e^{2-2} - 2) = \lim_{t\to 2} f(1,-1) = -8 \quad \text{dato}$$

si f es diferenciable $\Rightarrow$ es continua" en ese pto por lo tanto

$f(1,-1) = -8$ ✓

Regla de la cadena



Tengo que las derivadas direccionales son

$$D_v f(1,-1) = \nabla f(1,-1)\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right) = 0 \checkmark$$

y

$$D_u f(1,-1) = \nabla f(1,-1)\cdot\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 3 \checkmark$$

(Esto vale porque f es diferenciable)

llamo $(a,b) = \nabla f(1,-1)$

$\Rightarrow$ tengo que

- $D_v f(1,-1) = (a,b)\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right) = 0$ I
- $D_u f(1,-1) = (a,b)\cdot\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 3$ II

$$\left.\begin{array}{l} \text{I} = a\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{b}{\sqrt{10}} = 0 \\ \text{II} = a\frac{3}{5} + b\frac{4}{5} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow a\frac{3}{\cancel{\sqrt{10}}} = \frac{b}{\cancel{\sqrt{10}}} \iff \boxed{b = 3a}$$

reemplazo en II

con $b = 3a$

$$\text{II} = a\frac{3}{5} + \frac{3a\cdot 4}{5} = 3 \iff \frac{15a}{5} = 3 \iff \boxed{a = 1}$$

con $\boxed{a = 1 \Rightarrow b = 3} \Rightarrow \boxed{\nabla f(1,-1) = (1,3)} \checkmark$

RTA pto 4.a)

b) $g(s,t) = f(\underbrace{s^2+t^2}_{x}, \underbrace{t^2(s+1) - e^t}_{y})$

Hallar plano tangente en $(1,0,g(1,0))$

sol: ec. plano tangente

$$\pi: z = g(x_0,y_0) + \nabla g(s_0,t_0)(s - s_0, t - t_0)$$

por el inciso a)

Notar que: $g(1,0) = f(1+0, 0^2(1+1) - e^0) = f(1,-1) = \boxed{-8} \checkmark$

acá ya lo evaluaste en $(1,-1)$...

¿en qué puntos?

Luego

g
x y
s t s t

$$g_s = f_x \cdot x_s + f_y \cdot y_s = 1\cdot(2s) + 3\cdot(t^2)$$

$$g_t = f_x\cdot x_t + f_y\cdot y_t = 1\cdot(2t) + 3\cdot(2t(s+1) - e^t)$$

$g_s(1,0) = 2 \checkmark$

$g_t(1,0) = -1$ ✗

Luego

$$\pi: z = -8 + 2(s-1) + (-1)\cdot(t)$$

arrastra error.

$$\Rightarrow \boxed{z = 2s - t - 10}$$ RTA