Tema 1

1	2	3	4	5	Calificación
B-	B	B	X	B	A

Álgebra I

Segundo Cuatrimestre - Segundo parcial - 3/12/2019

Ejercicio 1 Hallar **todos** los primos $p \in \mathbb{N}$ tales que

$$p \mid 19^{p+1} + 45^{2p-1} + 21.$$

Ejercicio 2 Sea

$$z = \frac{(\sqrt{3} - 3i)^{49q+2}}{-1 + \sqrt{3}i}.$$

Hallar los posibles restos de la división de q por 6, sabiendo que z es un número real negativo.

Ejercicio 3 Probar que

$$\sum_{k=0}^{2019} (w^k + \bar{w}^k) = 2Re(w^5) + 1$$

para cada $w \in G_{11}$ primitiva.

Ejercicio 4 Sea $w \in G_9$ una raíz novena primitiva de la unidad. Probar que $w + \overline{w}$ es raíz de $f = X^3 - 3X + 1$. Luego, factorizar f en $\mathbb{C}[X]$.

Ejercicio 5 Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado **mínimo** que cumpla las siguientes condiciones **simultáneamente**:

- todas las raíces en $\mathbb{C}$ de $X^5 - X^4 - 4X^3 + 4X^2 + 4X - 4$ son raíces de f.
- f tiene una raíz compleja múltiple de argumento $\frac{3}{2}\pi$.
- f es mónico y $f(0) = 2$.

Para el polinomio f hallado, dar su factorización en polinomios irreducibles en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$.

Colocar nombre, apellido y LU en cada hoja entregada.
Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique apropiadamente todas sus respuestas.

1) $p \mid 19^{p+1} + 45^{2p-1} + 21 \iff 19^{p+1} + 45^{2p-1} + 21 \equiv 0 \ (p)$

$\iff 19^{p} \cdot 19 + 45^{p+p-1} + 21 \equiv 0 \ (p)$

$\iff 19 \cdot 19 + 45^{p} \cdot 45^{p-1} + 21 \equiv 0 \ (p)$ por P.T.F. ① $(a^p \equiv a \ (p))$

Supongo $45 \perp p \iff p \neq 3 \wedge p \neq 5$

$\Rightarrow 19^2 + 45 \cdot 1 + 21 \equiv 0 \ (p)$ por P.T.F. ① y ② $(a^{p-1} \equiv 1 \ (p)$ si $a \perp p)$

$\iff 427 \equiv 0 \ (p)$

$\iff 7 \cdot 61 \equiv 0 \ (p) \iff \boxed{p = 7 \vee p = 61}$

• Analizo $p = 3$ y $p = 7$!

• $\underset{0}{\underset{\parallel\!\!\!/}{19^3}} \cdot 19 + \underset{0}{\underset{\parallel}{45^5}} + \underset{0}{\underset{\parallel}{21}} \equiv 0 \ (3)$

ABS! $\Rightarrow p \neq 3$

• $19^{5\,6} \cdot 19 + \underset{0}{\underset{\parallel}{45^9}} + 21 \equiv 0 \ (5)$

$19^{2} + 21 \equiv 0 \ (5)$ por P.T.F. ①

$40 \equiv 0 \ (5)$ ✓ ✗

$\Rightarrow \boxed{p = 5}$

SOL: $p = 5 \vee p = 7 \vee p = 61$.

2) Paso los números a su forma trigonométrica.

$|\sqrt{3} - 3i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-3)^2} = 2\sqrt{3}$, $\arg(\sqrt{3} - 3i) = 2\pi - tg^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) = \frac{5}{3}\pi$

$|-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$, $\arg(-1 + \sqrt{3}i) = \frac{\pi}{2} + tg^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3}\pi$

$\Rightarrow \sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3} \cdot e^{i\frac{5}{3}\pi}$ y $-1 + \sqrt{3}i = 2 \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi}$

, $z \in \mathbb{R}_{<0} \iff \arg(z) = -\pi$

$z = \dfrac{(2 \cdot \sqrt{3} \cdot e^{i\frac{5}{3}\pi})^{499+2}}{2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{(2\sqrt{3})^{499+2}}{2} \cdot \dfrac{e^{i\frac{5}{3}\pi \cdot (499+2)}}{e^{i\frac{2}{3}\pi}}$ Sólo esto afecta al $\arg(z)$

$\arg\left(e^{i\left[\frac{5}{3}\pi \cdot (499+2) - \frac{2}{3}\pi\right]}\right) = -\pi \iff \frac{5}{3}\pi \cdot (499+2) - \frac{2}{3}\pi = -\pi + 2k\pi$

$\Leftrightarrow \frac{245}{3} q \cancel{\pi} + \frac{10}{3}\cancel{\pi} - \frac{2}{3}\cancel{\pi} = -\cancel{\pi} + 2k\cancel{\pi}$

$\Leftrightarrow \frac{245}{3} q + \frac{10}{3} - \frac{2}{3} = -1 + 2k$

$\Leftrightarrow 245 q + 10 - 2 = -3 + 6k \Leftrightarrow 245 q + 8 \equiv -3 \ (6)$

$\Leftrightarrow 245 q \equiv -11 \ (6)$

$\Leftrightarrow 5q \equiv 1 \ (6)$

$\Leftrightarrow 25 q \equiv 5 (6)$

$\boxed{q \equiv 5 \ (6)}$

(5) • Busco las raíces de $g(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 4$

$g(1) = 0$ a simple vista, así que $(x-1)$ es factor de $g(x)$ y lo divido.

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 4 & x - 1 \\
\hline
- \ x^5 - x^4 & x^4 - 4x^2 + 4 \\
\hline
0 + 0 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 4 & \\
\quad -4x^3 + 4x^2 & \\
\hline
0 + 0 + 4x - 4 & \\
\quad 4x - 4 & \\
\hline
\quad 0 & \\
\end{array}
$$

$\Rightarrow g(x) = (x-1) \cdot (x^4 - 4x^2 + 4)$

• Busco las raíces ~~def~~ del factor hallado usando sustitución.

$y = x^2$, $y^2 - 4y + 4 = x^4 - 4x^2 + 4$

$y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2 \Rightarrow$

$x_{1,2}^2 = 2$ y $x_{3,4}^2 = 2$

$\Rightarrow x^4 - 4x^2 + 4$ tiene a $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ como raíces dobles.

$\Rightarrow 1, \sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ deben ser ~~raíz~~ raíces de $f(x)$.

Un número complejo z cumple $\arg(z) = \frac{3}{2}\pi \iff$ es imaginario puro con $\mathrm{Im}(z) < 0$. No obstante, como $f \in \mathbb{Q}[x]$, su conjugado debe ser raíz también.

Hasta ahora, mis factores de f son $(x-1)$, $(x-\sqrt{2})$ y $(x+\sqrt{2})$.

Como su producto en $x=0$ es 2 y busco que $f(0)=2$, ~~los factores~~ el producto de los factores complejos debe ser 1, para que f mantenga el mínimo grado. Por la misma razón, elijo que estas 2 raíces ~~tenga~~ sean dobles.

Si z es de la forma bi con $b \in \mathbb{R}_{>0}$, yo busco

$\cancel{bi \cdot bi}$ $z \cdot \bar{z} = 1 \iff (bi) \cdot (bi) = 1$

$(-b) \cdot (b) \cdot (-1) = 1$

$b^2 = 1$ (es redundante el signo ya que su conjugado también es raíz)

$b = 1$ resuelve.

Ent $\therefore$ $f(x) = (x-1) \cdot (x+\sqrt{2}) \cdot (x-\sqrt{2}) \cdot (x-i)^2 \cdot (x+i)^2$

- $f(x)$ ya está reducido en $\mathbb{C}[x]$.
- En $\mathbb{R}[x]$, $f(x) = (x-1) \cdot (x+\sqrt{2}) \cdot (x-\sqrt{2}) \cdot (x^2+1)^2$.
- En $\mathbb{Q}[x]$, $f(x) = (x-1)(x^2-2) \cdot (x^2+1)^2$.

3

(3) $\sum_{k=0}^{2019} \left(\omega^k + \overline{\omega}^k\right) = \sum_{k=0}^{2012} \omega^k + \sum_{k=0}^{2012} \overline{\omega}^k + \sum_{k=2013}^{2019} \omega^k + \sum_{k=2013}^{2019} \overline{\omega}^k$ (*)

$\omega \neq 1$ porque es primitiva.

$(*) \Rightarrow \underbrace{\frac{\omega^{2013}-1}{\omega-1}}_{=0} + \underbrace{\frac{\omega^{-2013}-1}{\omega-1}}_{=0} + \sum_{k=2013}^{2019} \omega^k + \sum_{k=2013}^{2019} \overline{\omega}^k$

Porque $2013 = 11k$ entonces $\omega^{2013} = (\omega^{11})^k = 1$

$= \omega^{2013} + \omega^{2014} + \omega^{2015} \dots + \omega^{2019} + \omega^{-2013} \dots + \omega^{-2019}$

$= \omega^0 + \omega^1 + \dots + \omega^6 + \omega^0 + \omega^{-1} \dots + \omega^{-6}$

~~$= 2 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + 2\omega^5 + 2\omega^6 + \omega^7 + \omega^8 +$~~

$= 2 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + \omega^{-1} + \omega^{-2} + \omega^{-3} + \omega^{-4} + \omega^{-5} + \omega^{-6}$

$= 2 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \overline{\omega}^5 + \overline{\omega}^6 + \omega^5 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^9 + \omega^{10}$

$= 1 + \sum_{k=0}^{10} \omega^k + \omega^5 + \overline{\omega}^5 \cancel{+ \omega^6} \cancel{+ \overline{\omega}^6} = 1 + 0 + \omega^5 + \overline{\omega}^5 \cancel{+ \omega^6} \cancel{+ \overline{\omega}^6}$

$\to 0$

~~Como ω es raíz de la unidad, ω~~

Como $\overline{z} + z = 2\mathrm{Re}(z) + \cancel{\mathrm{Im}(z)} - \cancel{\mathrm{Im}(z)}$,

$\boxed{= 1 + 2\mathrm{Re}(\omega^5)}$