Promocioro (9 nueve)

TEMA 1

1	2	3	4	Calificación
B	B	B	B/B	10

APELLIDO Y NOMBRE: NO. DE LIBRETA:

CARRERA: Lic. en cs. de la computación TURNO DE PRÁCTICA: 2

Álgebra I

Segundo Cuatrimestre 2022 – Segundo Parcial – 29/11/22

1. Un kiosco que tiene un gran stock de sobres de figuritas del mundial ha decidido venderlos por caja con descuento. Hallar la cantidad de sobres que vienen en una caja sabiendo que tal cantidad es la misma en cada caja, que no supera los 300 sobres, y que

   - cuando 24 compañeros de trabajo compraron entre todos 5 cajas, al repartir los sobres en partes iguales sobraron 3,
   - cuando 28 compañeros de colegio compraron entre todos 2 cajas, al repartir los sobres en partes iguales sobraron 18.

2. Hallar todos los $p \in \mathbb{N}$ primos tales que

$$p \mid 5^{p+1} + 77^{3p-3} + 19.$$

3. Sea $d \in \mathbb{N}$ con $d \geq 2$. Sea $a \in \mathbb{C}$ y

$$f = X^{2d} - 10X^d + a \quad \in \mathbb{C}[X].$$

   a) Determinar todos los valores de a para los cuales f admite raíces múltiples.

   b) Para cada valor de a hallado, determinar la cantidad de raíces distintas de f y la multiplicidad de cada una de ellas.

4. Sea $f = X^4 + X^3 + X \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.

   a) Hallar las raíces de f en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

   b) Factorizar f como producto de polinomios irreducibles mónicos en $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.

1) Me piden hallar la cant. de sobres q' vienen en una caja, tq:

· la cant. de sobres por caja ≤ 300.

· 24 personas equivale a 5 ~~[illegible]~~ cajas + 3. sobres

· 28 personas equivale a 2 cajas + 18 sobres

$\triangleright$ $5x \equiv 3 \ (24)$ ⟶ "Reparto $5.x$ sobres en 24 y sobran 3." sobres

x: sobres por caja

$\triangleright$ $2x \equiv 18 \ (28)$ ⟶ "Reparto $2x$ sobres en 28 y sobran 18 sobres"

me armo un sist. de congr. lineal.

$$\begin{cases} 5x \equiv 3 \ (24) \\ 2x \equiv 18 \ (28) \end{cases} \overset{2^3 \perp 3}{\iff} \begin{cases} 5x \equiv 3 \ (2^3) \\ 5x \equiv 3 \ (3) \end{cases} \quad \overset{2^2 \perp 7}{\iff} \begin{cases} 2x \equiv 18 \ (2^2) \\ 2x \equiv 18 \ (7) \end{cases}$$

O sea,

$$\begin{cases} 5x \equiv 3 \ (8) \overset{4|8}{\Longrightarrow} 5x \equiv 3 \ (4) \iff x \equiv 3 \ (4) \\ 5x \equiv 3 \ (3) \\ 2x \equiv 18 \ (4) \ \circledast \\ 2x \equiv 18 \ (7) \end{cases}$$

y, si voy a $\circledast$ me queda $2 \cdot 3 \equiv 18 \ (4)$
$\iff 4 \mid 6 - 18$
$\iff 4 \mid -12$ ✓

la primer cond. y $\circledast$ no son incompatibles.

luego, como ~~[illegible]~~ $4 \mid 8$ sé q' la primer ec. implica q' $5x \equiv 3 \ (4)$, q' es compatible con $\circledast$ y ~~[illegible]~~ tienen mismo mód. esto quiere decir q'

impulsado por CamScanner

la Primer cond. $\Rightarrow$ ⊛ /

luego, tengo:

$$\begin{cases} 5x \equiv 3\ (8)\ \alpha \\ 5x \equiv 3\ (3)\ \beta \\ 2x \equiv 18\ (7)\ \gamma \end{cases}$$

~~como el sistema~~ ~~8, 3 y 7 son coprimos~~

Resuelvo cada ec. de congr. α, β, γ.

α:

$$5x \equiv 3\ (8) \overset{5 \equiv -3\ (8)}{\iff} -3x \equiv 3\ (8) \iff x \equiv -1\ (8) \iff \boxed{x \equiv 7\ (8)}$$

$-1 \perp 8$
$3 \perp 8$
$-1 \equiv 7\ (8)$

β:

$3 \equiv 0\ (3)$
$5 \equiv 2\ (3)$

$$5x \equiv 3\ (3) \iff 2x \equiv 0\ (3) \overset{2 \equiv -1\ (3)}{\iff} -x \equiv 0\ (3) \overset{-1 \perp 3}{\iff} \boxed{x \equiv 0\ (3)}$$

γ:

$$2x \equiv 18\ (7) \overset{18 \equiv 4\ (7)}{\iff} 2x \equiv 4\ (7) \overset{2 \perp 7}{\iff} \boxed{x \equiv 2\ (7)}$$

Juntando tengo q'

$$\begin{cases} x \equiv 7\ (8)\ \alpha' \\ x \equiv 0\ (3)\ \beta' \\ x \equiv 2\ (7)\ \gamma' \end{cases}$$

✓ Y ~~[illegible]~~ ya q' este sist. es válido y 8, 3 y 7 son coprimos 2 a 2. Sé, por el TCR ~~[illegible]~~ q' este sistema tiene sol. y esta sol. es única.

Sé q' $x \equiv 9\ (3)$ y q' $x \equiv 9\ (7)$. Entonces por propiedad vista en la teórica:

$$\begin{cases} x \equiv 9\ (3) \\ x \equiv 9\ (7) \end{cases} \overset{3 \perp 7}{\iff} x \equiv 9\ (21)$$ ✓

↳ otra forma de justificar esto es pensando ~~[illegible]~~ en ese sistemita y usar ~~[illegible]~~ q' ~~[illegible]~~

como $3 \perp 7$, y el sist. es válido
el TCR me asegura q' tiene sol. y
esta es única. Y como encontré una
sol y el TCR me garantiza unicidad
sé q' esa es mi sol.

Luego,

$$\begin{cases} x \equiv 7 \ (8) \\ x \equiv 9 \ (21) \end{cases}$$

Como sé q' me va a
quedar mód $168 = 8.21$
ni me gasto en ver valores
y hago directo TCR.

Defino,

$x := x_1 + x_2$

tq'

$$\begin{cases} x_1 \equiv 7 \ (8) \\ x_1 \equiv 0 \ (21) \end{cases} \wedge \begin{cases} x_2 \equiv 0 \ (8) \\ x_2 \equiv 9 \ (21) \end{cases}$$

Resuelvo:

x_1:

Por la 2da ec:

$x_1 = 21K$

$\Updownarrow$

$21K \equiv 7 \ (8)$

$\Updownarrow$ $21 \equiv 5 \ (8)$

$5K \equiv 7 \ (8)$

$\Updownarrow$ $3 \perp 8$ $\rightarrow 3.7 = 21$

$15K \equiv 21 \ (8)$

$\Updownarrow$ $15 \equiv 7 \ (8)$

$7K \equiv 3.7 \ (8)$

$\Updownarrow$ $(*)$

$(*)$

$\Updownarrow$ $7 \perp 8$

$K \equiv 3 \ (8)$

$K = 3$ sirve

Luego, $\underline{x_1} = 21.3 = \underline{63}$

x_2:

$$\begin{cases} x_2 \equiv 0 \ (8) \\ x_2 \equiv 9 \ (21) \end{cases}$$

De acá saco q!

$x_2 = 8 \cdot q$

$\Downarrow$

$8 \cdot q \equiv 9 \ (21)$

$\Leftrightarrow 32\, q \equiv 36 \ (21)$

$4 \perp 21 \qquad \underset{11}{\overset{\text{\tiny ||}}{32}} \qquad \underset{15}{\overset{\text{\tiny ||}}{36}}$

$\Leftrightarrow 22\, q \equiv 9 \ (21)$

$2 \perp 21 \qquad \underset{1}{22}$

$\Leftrightarrow q \equiv 9 \ (21)$, $q = 9$ sirve.

$x_2 = 8 \cdot 9 = \underline{72}$

Juntando, $x = 63 + 72 = 135$

Verifico, $135 \equiv 7 \ (8)$ ✓

$135 \equiv 9 \ (21)$ ✓ dan. :)

Por el TCR entonces tengo q!:

$x \equiv 135 \ (168) \Leftrightarrow x = 168 \cdot l + 135$, $l \in \mathbb{N}_0$ (Por enunciado) no tiene sentido sobres neg. x caja

x → sobres por caja.

Ahora, sé q! $x \leq 300$

luego,

$168 \cdot l + 135 \leq 300$

$168 \cdot l \leq 165$

$l \leq 165/168 < 1$

y como $l \in \mathbb{N}_0$, $l = 0$

luego, $\boxed{\underline{\text{Rta}}: 135}$ → Sobres por caja.

2) Hallar todos los $p \in \mathbb{N}$ primos t.q.

$$p \mid \underbrace{5^{p+1} + 77^{3p-3} + 19}_{x}$$

$\Updownarrow$

$$5^{p+1} + 77^{3p-3} + 19 \equiv 0 \ (p)$$

"Dividir y conquistar".

Separo en casos.

α: $p \mid 5 \underset{p \text{ primo}}{\iff} p = 5$

β: $p \mid 77 \underset{p \text{ primo}}{\iff} p = 7$ ó $p = 11$.

γ: $p \mid 19 \underset{p \text{ primo}}{\iff} p = 19$

δ: $p \nmid 5 \wedge p \nmid 77 \wedge p \nmid 19$.

α:

$$x \equiv 0^{5+1} + 2^{3 \cdot 5-3} - 1 \ (5)$$

$$\equiv 0 + \underbrace{2^{12}}_{\circlearrowleft} - 1 \ (5)$$

Como 5 es primo y $5 \nmid 2$ $(5 \perp 2)$

utilizo el corolario del PTF.

Luego,

$$2^{12} \equiv 2^{R_4(12)} \ (5)$$

$$\equiv 2^0 \ (5)$$

$$\equiv 1 \ (5)$$

Ent. tengo q' $x \equiv 0 + 1 - 1 \ (5)$

$\equiv 0 \ (5)$ ✓

<u>P = 5 vale.</u>

<u>B</u>:

· P = 7

$x \equiv 5^8 + 0 + 19 \ (7)$

$\equiv (-2)^8 - 2 \ (7)$

$\equiv 256 - 2 \ (7)$

$\equiv 254 \ (7)$

$\equiv 2 \ (7) \not\equiv 0 \ (7)$ P = 7 no sirve.

· P = 11

$x \equiv 5^{12} + 0 + 19 \ (11)$ → Como 11 es Primo y $11 \nmid 5$ uso el PTF:

$\equiv 5^{12} + 8 \ (11)$

$\equiv 25 + 8 \ (11)$

$\equiv 33 \ (11)$ ✓

$\equiv 0 \ (11)$ ✓

Sé q' $5^{12} \equiv 5^{R_{10}(12)} \ (11)$

$\equiv 5^2 \ (11)$

$\equiv 25 \ (11)$

<u>P = 11 vale.</u>

γ:

$$x \equiv 5^{20} + 77^{(3\cdot 19)-3} + \cancel{Q} \ (19)$$
$$\equiv 5^{20} + 1 \ (19)$$

CA:
$77 \equiv 1 \ (19)$
$1^{3\cdot 19 - 3} = 1$
$20 \equiv 2 \ (18)$

Como 19 es primo y $19 \nmid 5$ puedo usar el PTF,

luego, $5^{20} \equiv 5^{R_{18}(20)} \ (19)$
$$\equiv 5^2 \ (19)$$
$$\equiv 25 \ (19)$$

luego, $x \equiv 25 + 1 \ (19)$
$$\equiv 26 \ (19)$$
$$\equiv 7 \ (19) \not\equiv 0 \ (19)$$

$p = 19$ no vale.

... Recapitulo...
sé q' $p = 5 \wedge p = 11$ vale.
Ahora veo el caso δ: $(p \nmid 5,\ p \nmid 77,\ p \nmid 19)$

$$x = \underbrace{5^{p+1}}_{1} + \underbrace{77^{3p-3}}_{2} + 19$$

$x \equiv 0 \ (p) \to$ quiero.

Veo 1 y 2 por separado

1: Como p es primo y $p \nmid 5$ sé q' $\underbrace{5^{p-1} \equiv 1 \ (p)}$ por el PTF.
Y tambien sé q' $5^{p+1} = 5^{p-1} \cdot 5^2$.

2: A su vez, como p es primo y $p \nmid 77$ sé q' $77^{p-1} \equiv 1 \ (p)$ y tab sé q'
$$77^{3p-3} = 77^{3\cdot(p-1)} = (77^{p-1})^3$$

Luego, juntando todo:

$$x \equiv 5^{p-1} \cdot 5^2 + (7^{p-1})^3 + 19 \quad (p)$$
$$\equiv 1 \cdot 25 + 1^3 + 19 \quad (p)$$
$$\equiv 25 + 20 \quad (p)$$
$$\equiv 45 \quad (p)$$

Y esto es $\equiv 0 \ (p) \iff p \mid 45$

$$45 = 5 \cdot 9 = 5 \cdot 3^2 \quad \Uparrow \ p \text{ primo}$$

Ya vimos $\underline{p=5}$, q' vale, ó $\underline{p=3}$, un p más.

Luego Rta: $p \in \{3, 5, 11\}$.

3) Sea $d \in \mathbb{N}$ con $d \geq 2$. Sea $a \in \mathbb{C}$ y
$F = x^{2d} - 10x^{d} + a \in \mathbb{C}[x]$

a) Determinar todos los valores de a para los cuales F admite raíces múlt.

α es raíz mult. de F
$\Updownarrow$ def.

$F(\alpha) = 0 \wedge F'(\alpha) = 0$

Derivo F. (voy a tomar 2 casos, $x \neq 0$ y $x = 0$)

$F' = 2d . x^{2d-1} - 10d x^{d-1}$

y $F' = 0 \iff 2d . x^{2d-1} - 10d x^{d-1} = 0$
$\iff 2d . x^{2d-1} = 10d x^{d-1}$
$\overset{d \geq 2}{(2d \neq 0)} \iff x^{2d-1} = 5 x^{d-1}$ (sup. $x \neq 0$)
$\iff x^{d} = 5$

Vuelvo a F.

~~[illegible]~~ $F(x) = 0$ con $x^d = 5$
$\Updownarrow$
$x^{2d} - 10x^{d} + a = 0$ con $x^d = 5$
$\iff (x^{d})^2 - 10x^{d} + a = 0$
$\iff 5^2 - 10.5 + a = 0$
$\iff 25 - 50 + a = 0$
$\iff \boxed{a = 26}$

~~[illegible] $x^{2d} - 10x^{d}$ [illegible]~~

~~Y, hasta donde veo es un solo valor.~~

Rta en otra hoja.

b) Para cada valor de a hallado, la cantidad de raíces distintas de F y la mult. de cada una de ellas. (caso $a = 25$)

Por (a) sé q $(x^2-5)^2 \mid F$ ya q $(x^2-5) \mid F'$ $\wedge$ $(x^2-5) \mid F$

$$(x^2-5)^2 = x^{2\cdot 2} - 5x^2 - 5x^2 + 25$$
$$= x^{2\cdot 2} - 10x^2 + 25$$

¡Es el mismo pol.! ¿Casualidad?, No.

La cantidad de raíces serán exactamente 2 distintas.

Pues $x^2 - 5 = 0 \iff x^2 = 5$ q' no es nada más q' las raíces 2-ésimas de la unidad (G_2) mult. por $\sqrt[2]{5}$ y por teo. sé q' son todas $\neq$.

Y la mult. de cada una de ellas será 2.

Ya q' vimos q' en F' son todas simples.

i.e. $(x^2-5) \mid F'$ pero $(x^2-5)^2 \nmid F'$

otra justificación, $(x^2-5)^2 = F$ Ergo, la mult. de las raíces en F'' es 0.

todas simples $\neq$

· Caso $x = 0$

$F' = 2d \cdot x^{2d-1} - 10d\, x^{d-1}$

Y $F' = 0 \iff 2d\, x^{2d-1} - 10d\, x^{d-1} = 0$

$\iff x = 0$

Y en F:

$F = x^{2d} - 10x^{d} + a$

$\iff 0^{2d} - 10\, 0^{d} + a = 0$

$F(0) = 0 \iff a = 0$

Rta$_a$: ~~[illegible]~~ $a = 25 \wedge a = 0$

(b) · Caso $a = 0$ de acá por (a)

sabemos q' $x | F \wedge x | F'$ y más precisamente $x^2 | F$ por lo q' vimos con la derivada.

Y, más aún, $x^d | F$ pues

$F = x^{2d} - 10x^{d} = x^{d} \cdot (x^{d} - 10)$

Una Raíz con mult. d.

Y como $(x^d - 10)$ está elevado a la 1, los Raíces son simples. (y son todos ≠)

d Raíces ≠ simples

Pues $x^d - 10 = 0$

$\iff x^d = 10$

"$x \in \sqrt[d]{10} \cdot G_d$"

las Raíces de la unidad × 10 (q' son ≠ por teo.)

Rta$_b$:

· $a = 25$

d Raíces ≠, todas con mult. 2

· $a = 0$

$d+1$ Raíces ≠

$\text{mult}(0, F_0) = d$

Y el Resto simples.

Ya tengo un Factor, hago Ruffini en g con la Raíz $\bar{1}$.
(Vimos con Flor en la Práctica q' vale.)

$g = x^3 + x^2 + \bar{1}$

$$\begin{array}{c|cccc} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \hline & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{3} = \bar{0} \end{array}$$

luego, $g = (x - \bar{1}) \cdot (x^2 + \bar{2}x + \bar{2})$

y $F = x \cdot (x - \bar{1}) \cdot (\underbrace{x^2 + \bar{2}x + \bar{2}}_{})$

Y, lo copado ahora es q' ⊛. (lo voy a llamar h a partir de ahora a $x^2 + \bar{2}x + \bar{2}$) ⊛ h es de grad. 2 y sé por teórica q' ser irreducible es lo mismo q' tener Raíz. Ví antes q' $F(\bar{2}) \neq 0$ así q' no me gasto.

Veo $h(\bar{0})$ y $h(\bar{1})$.

$h(\bar{0}) \neq 0$, $h(\bar{1}) \neq \bar{0}$

luego, Rta: $F = \underset{\text{Irred. de grad 1.}}{x \cdot (x - \bar{1})} \cdot \underset{\text{grad. 2 sin Raíces en } \mathbb{Z}_{3\mathbb{Z}}}{(x^2 + \bar{2}x + \bar{2})}$