Probabilidad y Estadística (C) - Verano 2018

Segundo Parcial - 19 de marzo de 2018

Nombre y Apellido: [redacted]

Cantidad Total de Hojas: 5

	1	2	3	4	Calificación Total
Puntaje del ejercicio	25	20	27	28	100
Puntaje obtenido	25	20	27	28	100

Se aprueba con 60 puntos

Por favor, **hacer cada ejercicio en hoja aparte**. *Numerar todas las hojas, colocar el nombre en ellas e indicar en la última hoja antes de la firma el número total de hojas.*

- Justifique todas sus respuestas -

---

1. (25 puntos) Cada vez que Paula va a la facultad, debe almorzar y merendar. Para almorzar, con probabilidad 0.7 elige el menú del día, que cuesta \$34 y con probabilidad 0.3 elige una opción un poco más cara, que cuesta \$54. Para la merienda, con probabilidad 0.8 elige la opción ofrecida por el centro de estudiantes, que cuesta \$16 y con probabilidad 0.2 elige la opción ofrecida por el bar, que cuesta \$36. Sus elecciones en el almuerzo y la merienda son independientes y las elecciones entre los distintos días son independientes entre sí. El gasto diario de Paula es la suma de su gasto en almuerzo y su gasto en merienda.

   (a) (10 puntos) ¿Cuántos días debe ir a la facultad para que haya probabilidad de al menos 0.9 de que su gasto diario promedio esté entre 55 y 65 pesos? (Aclaración: se quiere la probabilidad **exacta** sea mayor a 0.9, no la probabilidad aproximada)

   (b) (8 puntos) Si este cuatrimestre va a la facultad 50 veces, aproximar la probabilidad de que su gasto total en esos 50 días haya superado los 3200 pesos.

   (c) (7 puntos) ¿Cuántas veces debería haber ido a la facultad para que la probabilidad del ítem anterior sea al menos 0.7?

2. (20 puntos) La cantidad de artículos científicos publicados por investigadores argentinos es un proceso de Poisson de parámetro λ artículos por día. Cada artículo tiene probabilidad $1/5$ de provenir del área de matemática y probabilidad $4/5$ de provenir de alguna otra área. Además, el área de proveniencia es independiente entre los distintos artículos. Se sabe que hay una probabilidad de 0.6321 de que al cabo de un día llegue por lo menos un artículo de matemática.

   (a) (5 puntos) Hallar λ.

   (b) (7 puntos) Sabiendo que al cabo de dos días se publicaron exactamente 5 artículos en total, hallar la probabilidad de que en esos dos días se hayan publicado exactamente 2 artículos de matemática.

   (c) (8 puntos) Sabiendo que al cabo de tres días se publicaron exactamente 7 artículos en total, hallar la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido publicados el primero de los tres días.

3. (27 puntos) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con densidad

$$f(x,\theta) = \frac{3}{(x-\theta)^4}\mathbb{I}_{[\theta+1,\infty)}(x).$$

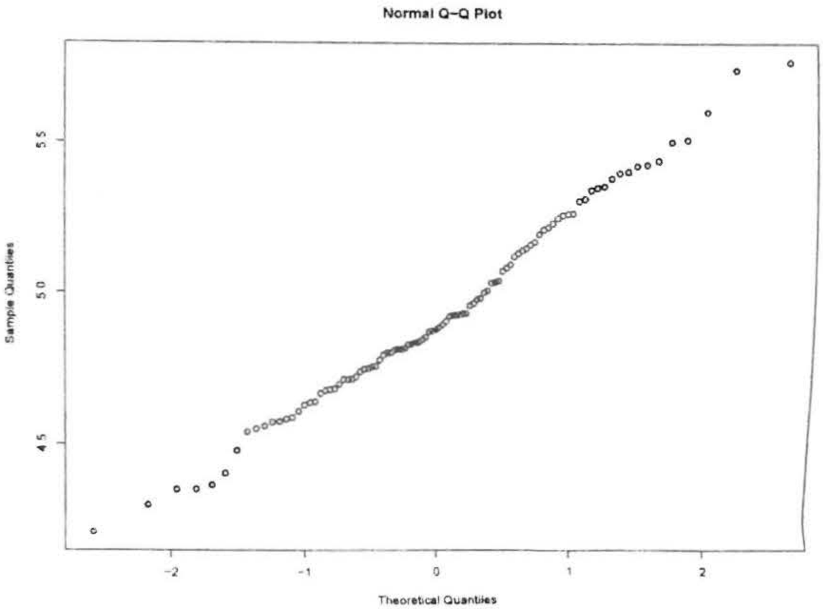
   (a) (7 puntos) Hallar el estimador de momentos de θ y decidir si es consistente y/o insesgado. (Sugerencia: al hacer la integral, puede servir usar la sustitución $y = x - \theta$).

(b) (6 puntos) Probar que el estimador de máxima verosimilitud de θ es $\widehat{\theta}_{MV} = \min X_i - 1$.

(c) (6 puntos) Probar que $\widehat{\theta}_{MV}$ es consistente para θ.

(d) (8 puntos) Usando un pivote basado en $\min X_i$, hallar un intervalo de confianza de nivel exacto 95% para θ (Sugerencia: hallar la distribución de $\min X_i - \theta$).

4. (a) (5 puntos) Se tomó una muestra de tamaño $n = 50$ del Ph en campos de soja en Buenos Aires. Al hacer el qq-plot de los datos, se obtiene el siguiente gráfico:



¿Qué conclusión acerca de la distribución que generó la muestra se puede sacar con este gráfico? ¿Se espera que la media poblacional sea menor, mayor o igual que la mediana poblacional? Justificar la respuesta.

(b) (23 puntos) Se sabe que el ~~Ph~~ PH medio de los campos de soja en Buenos Aires es 5 cuando las condiciones climáticas son las normales. En un determinado momento ocurre una fuerte inundación en la provincia. Se quiere saber si estas inundaciones producen un cambio en el ~~Ph~~ PH medio de los campos de soja. Se realizaron mediciones en 15 campos y el ~~Ph~~ PH promedio que se obtuvo es de 5.29. Se sabe que dichas mediciones son i.i.d, con distribución normal y varianza igual a 0.25. Se quiere que la probabilidad de afirmar que las inundaciones sí afectaron el ~~Ph~~ PH medio cuando en realidad esto es falso (error tipo I) sea de 0.05.

i. (10 puntos) Determinar las hipótesis para este problema. Basándose en el promedio de las 15 observaciones, hallar un test del nivel pedido para este caso. Escribir explícitamente cuál es el estadístico del test, su distribución bajo H_0. ¿Qué decisión se toma en este caso? ¿Cuál es el $p-$valor? Hallar otro valor para el nivel α tal que la decisión que se toma sea la contraria.

ii. (7 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de error de tipo II del test hallado en el item anterior cuando el verdadero valor medio del Ph luego de las inundaciones es 5.2?

iii. (6 puntos) Para los datos que se describen en el enunciado, hallar un intervalo de confianza de nivel 95% para la esperanza del valor del Ph luego de la inundación. ¿Es de nivel exacto o aproximado? Indicar cuál es el pivote que permitió construir dicho intervalo y justificar por qué tiene el nivel pedido.

(1) Sea va ind $\left\langle \begin{array}{l} X_i = \{\text{gasto en almuerzo de Paula en el i-ésimo día}\} \quad X_i \text{ iid} \\ Y_i = \{\text{gasto en merienda " " " " "}\} \quad Y_i \text{ iid.} \end{array}\right.$

$p_X(34) = 0,7 \quad p_X(54) = 0,3 \quad p_Y(16) = 0,8 \quad p_Y(36) = 0,2$

Sea $G_i = \{\text{gasto total en el i-ésimo día de Paula}\}$, G_i iid.

$G_i = X_i + Y_i \qquad R_{G_i} = \{34+16;\ 34+36;\ 54+16;\ 54+36\}$

$E(G_i) = E(X_i + Y_i) = 28 + 9,8 + 16,8 + 5,4 = 60$

$E(X_i + Y_i) = \sum_{g \in R_{G_i}} g\, p_G(g) = 50.(0,7 . 0,8) + 70(0,7 . 0,2) + 70(0,3 . 0,8) + 90(0,3 . 0,2)$

↳ ind entre almuerzo y merienda

(a) Me piden $m \mid P(55 < \overline{G}_m < 65) \geq 0,9$

(☺) $= P(55 - 60 \leq \overline{G}_m - \underbrace{E(\overline{G}_m)}_{=60} \leq 65 - 60) = P(-5 \leq \overline{G}_m - 60 \leq 5) = P(|\overline{G}_m - 60| \leq 5)$

$= 1 - P(|\overline{G}_m - 60| > 5) \geq 1 - \frac{V(\overline{G}_m)}{5^2}$; $E(\overline{G}_m) = E\left(\frac{\sum G_i}{m}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{m} E(G_i)}{m} = \frac{m}{m} E(G_i) = E(G_i) = 60$

$\frac{V(\overline{G}_m)}{5^2} = \frac{148}{m\, 5^2}$

por desigualdad de Tchebychev al ser $P(|\overline{G}_m - 60| > 5) \leq \frac{V(\overline{G}_m)}{5^2}$

$V(\overline{G}_m) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} G_i}{m}\right) = \frac{1}{m^2} V\left(\sum_{i=1}^{m} G_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{V(G_i)}{m^2} \overset{\text{id.}}{=} \frac{m\, V(G_i)}{m^2} = \frac{V(G_i)}{m} = \frac{148}{m}$

ind entre G_i V_i

$V(G_i) = E(G^2) - [E(G)]^2 = 3748 - 60^2 = 148.$

$E(G^2) = \underbrace{50^2(0,7 . 0,8)}_{1400} + \underbrace{70^2(0,7 . 0,2 + 0,3 . 0,8)}_{1862} + \underbrace{90^2(0,3 . 0,2)}_{486} = 3748.$

Luego, basta pedir $1 - \frac{148}{m . 5^2} \geq 0,9$ para que se cumpla (☺) $\geq 0,9$.

Despejando, pido $\boxed{m \geq 60}$ $\quad \{ m\, 0,1 \geq \frac{148}{5^2} \Leftrightarrow m \geq \frac{148}{5^2\, 0,1}$

Deberá ir a la facu al menos 60 días $\qquad m \geq 59,2$

(b) $P\left(\sum_{i=1}^{50} G_i > 3200\right) = P\left(\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{50} G_i - E\left(\sum_{i=1}^{50} G_i\right)}{\sqrt{V\left(\sum_{i=1}^{50} G_i\right)}}}_{Z \sim N(0,1) \text{ por TCL}} > \underbrace{\frac{3200 - E\left(\sum_{i=1}^{50} G_i\right)}{\sqrt{V\left(\sum_{i=1}^{50} G_i\right)}}}_{*}\right) \overset{a}{\approx} 1 - \Phi(*) = \cancel{1 - 0,9898} = \cancel{\Phi(2,32)} = \cancel{0,9898}$

$= 1 - 0,9898 = \boxed{0,01}$

$E\left(\sum_{i=1}^{50} G_i\right) = \sum_{i=1}^{50} E(G_i) = 50 . 60 = 3000$

$V\left(\sum_{i=1}^{50} G_i\right) = 50 . V(G_i) = 50 . 148 = 7400$

↳ ya resuelto en (*)

$* = \frac{3200 - 3000}{\sqrt{7400}} \approx +2,325$

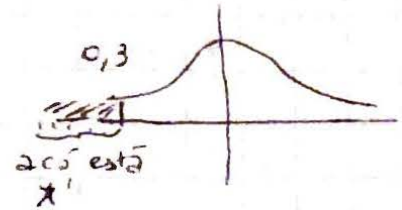
$\Phi(2,32) = 0,9898$

(c) $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{m} G_i > 3200\right) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{m} G_i - 60\cdot m}{\sqrt{148\, m}}}_{\sim N(0,1) \text{ por TCL}} > \underbrace{\frac{3200 - 60m}{\sqrt{148\, m}}}_{\star'}\right) \overset{a}{\approx} 1 - \phi(\star') \geq 0,7$

$\iff 0,3 \geq \phi(\star')$

~~basta pedir~~

Luego pido: $1 - 0,7 \quad \phi(\star')$



considero $\phi(0,525) \approx 0,7$

$\star' \leq -0,525 \iff \frac{3200 - 60m}{\sqrt{148\, m}} \leq -0,525$

C. tuxi: $\frac{3200}{-0,525} + \frac{60\, m}{0,525} \geq \sqrt{148 m} \iff (114,28\, m - 6095,24)^2 \geq (\sqrt{148 m})^2$

$13059,9\, m^2 + 6095,24^2 - 2(6095,24)(114,28)m \geq 148 m$

$\iff 13059,9\, m^2 - 1393276 + 6095,24^2 \geq 0$

$m \geq 54,12$

Deberío haber ido al menos $\boxed{\text{55 días}}$ a la facu.

Muy bien detallado todo

(2) Sea $(X_t)_{t\geq 1}$ {cantidad de artículos científicos publicados por (nu org) en t-días}

$(X_t)_{t\geq 1} \sim \mathcal{PP}(\lambda t)$

$p_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

Sea $M_t \sim \mathcal{PP}(\frac{\lambda}{5}t)$, M_t {artículos de matemático}

ind

$O_t \sim \mathcal{PP}(\frac{4}{5}\lambda t)$ O_t {artículos de otras áreas}

(a) Sabemos $\mathbb{P}(M_1 \geq 1) = 0,6321$

$M_1 \sim \mathcal{P}(\frac{\lambda}{5})$, luego $\mathbb{P}(M_1 \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(M_1 < 1) = 1 - \mathbb{P}(M_1 = 0) = 1 - \frac{(\frac{\lambda}{5})^0 e^{-\frac{\lambda}{5}}}{0!}$

$= 1 - e^{-\frac{\lambda}{5}} = 0,6321 \iff \ln(0,3679) = -\frac{\lambda}{5}$

$\iff \boxed{\lambda = 4,999 \approx 5}$

(b) $\mathbb{P}(M_2 = 2 \mid X_2 = 5) = \frac{\mathbb{P}(M_2 = 2 \cap X_2 = 5)}{\mathbb{P}(X_2 = 5)} =$

$\frac{\mathbb{P}(M_2 = 2 \cap O_2 = 3)}{\mathbb{P}(X_2 = 5)} \overset{M_t \text{ ind } O_t}{=} \frac{\underbrace{\mathbb{P}(M_2 = 2)}_{\sim\mathcal{P}(2)} \underbrace{\mathbb{P}(O_2 = 3)}_{\sim\mathcal{P}(8)}}{\underbrace{\mathbb{P}(X_2 = 5)}_{\sim\mathcal{P}(10)}} = \frac{\frac{2^2 e^{-2}}{2!} \cdot \frac{8^3 \cdot e^{-8}}{3!}}{\frac{10^5 \cdot e^{-10}}{5!}} = \frac{2 \cdot \frac{256}{3}}{\frac{2500}{3}} =$

$\boxed{= 0,2048}$

(c) $\mathbb{P}(X_1 \geq 2 \mid X_3 = 7)$

$\underbrace{0 \quad\quad 1}_{1}\underbrace{\quad\quad 2}_{2}\underbrace{\quad\quad 3}_{3}$ 3 días llegaron 7 artículos.

Considero c/u, $Y \sim \mathcal{U}nif[0,3]$, Y = {día en el que llegó el alguno de los 7 artículos}

Sea $p = \mathbb{P}(Y \leq 1) = \frac{1}{3}$, p = {proba de que algún artículos ~~llegue~~ se publique el 1° de los 3 días}

~~Luego, me piden $\mathbb{P}$~~

Sea W = {# de artículos que se publican el 1° de los 3 días entre los 7 que se publicaron}

$W \sim Bi(7; p = \frac{1}{3})$

Luego, me piden $\mathbb{P}(W \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(W = 0) - \mathbb{P}(W = 1) = 1 - (\frac{2}{3})^7 - \binom{7}{1}(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^6 =$

$= 1 - \cancel{0,7366}\ 0,2633 = \boxed{0,7366}$

Rta $\mathbb{P}$(al menos 2 de 7 publicados en 3 días, lo hagan el 1° día) = 0,7366.

7
27

(3) (a) $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx = \int_{\theta+1}^{\infty} \frac{3x}{(x-\theta)^4}\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{3(\mu+\theta)}{\mu^4}\,d\mu = 3\int_1^{\infty} \frac{1}{\mu^3}\,d\mu + 3\theta\int_1^{\infty}\frac{1}{\mu^4}\,d\mu =$

$$\left(\begin{array}{ll} \mu = x-\theta \iff x = \mu+\theta, & \cancel{\theta+1}, \\ d\mu = dx & \theta+1 < x < \infty \\ & \theta+1-\theta < x-\theta < \infty-\theta \\ & 1 < \mu < \infty \end{array}\right)$$

$$= 3\left[-\frac{1}{2\mu^2}\right]_1^{\infty} + 3\theta\left[-\frac{1}{3\mu^3}\right]_1^{\infty} = -\frac{3}{2}(-1) + \frac{3\theta(-1)}{3}(-1) = \boxed{\frac{3}{2}+\theta}$$

Por LGN, $\overline{X}_n \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}(X)$, luego pido $\boxed{\overline{X}_n = \frac{3}{2}+\theta}$

De este modo $\hat{\theta}_{MO} = \overline{X}_n - \frac{3}{2}$

Sea f. función inyectiva $f(x) = x - \frac{3}{2}$; como $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X)$, $f(\overline{X}_n) \xrightarrow{P} f(\mathbb{E}(X))$

- $\hat{\theta}_{MO} = f(\overline{X}_n) = \overline{X}_n - \frac{3}{2} \longrightarrow f\left(\frac{3}{2}+\theta\right) = \left(\left(\frac{3}{2}+\theta\right) - \frac{3}{2}\right) = \theta$, luego $\hat{\theta}_{MO} \xrightarrow{P} \theta$

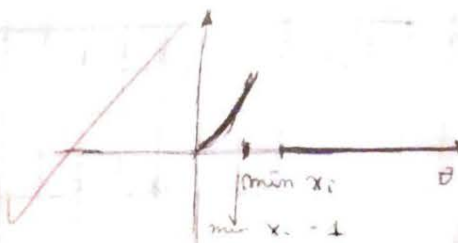
Luego, $\hat{\theta}_{MO}$ es consistente (✱) ¿Es insesgado?

(b) Sea L, función de máx verosi. de θ

$$L(\theta, \underbrace{X_1 \dots X_n}_{\text{supfijo para los cálculos}}) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i) = \frac{3^n}{\prod_{i=1}^{n}(x-\theta)^4}\, \mathbb{I}_{[\theta+1,\infty)}(\min x_i) = \cancel{\frac{3^n}{\prod_{i=1}^{n}(x-\theta)}}$$

Si $\min_{1\le i\le n} x_i \notin [\theta+1,\infty)$, $L(\theta, X_1 \dots X_n) = 0$.

" " $\in [\theta+1,\infty)$, $L(\theta; X_1 \dots X_n) = \frac{3^n}{\prod_{i=1}^{n}(x-\theta^{*})^4}$



- Obs, cuanto más chico es θ, más grande es el denominador pues θ está restándose. De allí que L sea una función creciente estricta, alcanzando su máx ~~en el m~~ cuando $\theta = \min X_i - 1$ pues así se cumple $\min X_i \in [\theta+1, +\infty)$

si $\theta = \min X_i - 1$
$1+\theta = \min X_i$, luego
$\min X_i \in [\theta+1, +\infty)$

Sup $\min X_i = \theta_1 + 2 \iff \theta_1 = \min X_i - 2$, para este valor
$\min X_i = \theta_2 + 1 \iff \theta_2 = \min X_i - 1$
de θ_1 $L(\theta_1, X_1 \dots X_n) < L(\theta_2, X_1 \dots X_n)$. Luego, se maximiza L con $\theta = \min X_i - 1$ pues $\forall \theta / \theta \leq \min X_i - 1$, L resulta menor que $L(\min X_i - 1, X_1 \dots X_n)$.

(c) Quiero ver que $\hat{\theta}_{MV} \xrightarrow{P} \theta$, es decir,

$\forall \varepsilon > 0$, $P(|\hat{\theta}_{MV} - \theta| > \varepsilon) \longrightarrow 0$

$\theta+1 \le \min X_i < \infty \iff$
$\theta \le \min X_i - 1 < \infty - 1 \iff$
$0 \le \min X_i - 1 - \theta < \infty$

$\mathbb{P}(|\hat{\theta}_{MV} - \theta| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|\min X_i - 1 - \theta| > \varepsilon) = \mathbb{P}(\min X_i - 1 - \theta > \varepsilon) =$

(✱) faltó probar que $V(X) < \infty$, si resta tiempo lo pruebo pues es supuesto para LGN

$= \mathbb{P}(\min X_i \geq \varepsilon + \theta + 1) = 1 - \mathbb{P}(\min X_i \leq \varepsilon + \theta + 1) = [1 - (F_X(\varepsilon + \theta + 1)]^n$

↳ considero X_i ind entre sí

$F_X(t) \int_{\theta+1}^{t} \frac{3}{(x+\theta)^4} dx = 3\int_{1}^{t-\theta} \frac{1}{u^4} du = \frac{3}{-3}\left[\frac{1}{u^3}\right]_1^{t-\theta} = -\left[\frac{1}{t-\theta} - 1\right] = 1 - \frac{1}{t-\theta}$

Luego, $(1 - F_X(\varepsilon + \theta + 1))^n = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{(\varepsilon+\theta+1)-\theta}\right)\right]^n = \left(\frac{1}{\varepsilon+1}\right)^n$

Como $0 < \frac{1}{\varepsilon+1} < 1$ pues $\varepsilon + 1 > 1$, luego $\left(\frac{1}{\varepsilon+1}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Luego, $\hat{\theta}^n_{MV} \xrightarrow{P} \theta$, $\hat{\theta}^n_{MV}$ es consistente.

(d) Como sugieren, sea $Y = \min X_i - \theta$

considero X_i, X_j ind $\forall i \forall j$ $i \neq j$

$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(\min X_i - \theta \leq t) = \mathbb{P}(\min X_i \leq t + \theta) =$

$[P(X_i \leq t + \theta)]^n = (F_X(t+\theta))^n = \left(1 - \frac{1}{(t+\theta) - \theta}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{t}\right)^n$

Error de cuenta

Busco $IC(\alpha = 0,95) = (a(X_1 \ldots X_n) < \theta < b(X_1 \ldots X_n))$ para θ

Quiero que $\mathbb{P}(a < \theta < b) = 1 - \alpha = 0,95 =$ (sigue ★).

(sigue *)

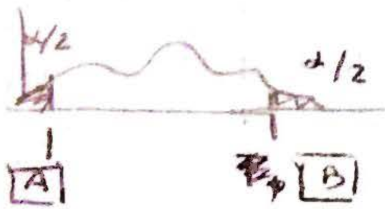
$$\hookrightarrow P = \mathbb{P}(-a > -\theta > -b) = \mathbb{P}(\min X_i - a > \min X_i - \theta > \min X_i - b) = 1 - \alpha.$$

$$= F_Y(\underbrace{\min X_i - a}_{\boxed{B}}) - F_Y(\underbrace{\min X_i - b}_{\boxed{A}})$$

$$\bullet\ F_Y(\min X_i - b) = \frac{\alpha}{2} \iff \left(1 - \frac{1}{\min X_i - b}\right)^n = \frac{\alpha}{2} \iff 1 - \frac{\alpha}{2}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\min X_i - b}$$

$$\iff b = \min X_i - \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$\iff b = \min X_i - \frac{1}{1 - (0{,}025)^{1/n}}$$



4/5

$$\bullet\ F_Y(\min X_i - a) = 1 - \frac{\alpha}{2} \iff 1 - \frac{\alpha}{2} = \left(1 - \frac{1}{\min X_i - a}\right)^n$$

$$\iff \frac{1}{\min X_i - a} = 1 - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \iff a = \min X_i - \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}}$$

$$\iff a = \min X_i - \frac{1}{1 - (0{,}975)^{1/n}}$$

$$\bullet\ \text{Luego, } IC(\theta, 95) = \left(\min_{1 \le i \le n} X_i - \frac{1}{1\ 0{,}025^{1/n}} ; \min X_i - \frac{1}{1 - (0{,}975)^{1/n}}\right)$$

9/5/5

(4) (a) A partir del gráfico concluyo que los datos obtenidos del pH de los campos de soja en Bs As provienen de una población con distribución normal dado que se aprecia una relación lineal (que pasa por el origen) en el Q-Q plot entre los "theoretical Quantiles" y "Sample Quantiles".

Espero que la media y la mediana poblacional sean iguales dada la simetría de la función de densidad de la normal. ✓

(b) Sea $X_1, \dots X_m$ muestra aleatoria, $X_i \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ donde $\mathbb{E}(X_i) = \mu$
$X_i = \{$ pH de la i-ésima medición del campo de soja $\}$
y $V(X_i) = \sigma^2$. Además por dato $V(X_i) = 0,25$, luego $\sigma = 0,5$
$\mathbb{E}(X_i) = 5$, luego $\mu = 5$

(i) Quiero testear.

$H_0: \mu = 5 \qquad H_1: \mu \neq 5$ ✓

Basándonos en el promedio de las 15 mediciones, en el test se debe cumplir: $m = 15 \quad \alpha = 0,05$.

Estadístico del test $\sqrt{m}\left(\frac{\bar{X} - 5}{\sqrt{0,25}}\right) = T_m$

Bajo H_0 ($\mu = 5$), $T_m \sim N(0,1)$

$RR(\alpha) = \left(-\infty, -z_{\frac{\alpha}{2}}\right] \cup \left[z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right)$ región de rechazo.

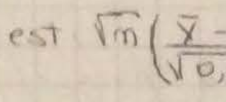
Con los datos de la muestra: $\bar{X}_{15} = 5,29$.

Luego, $T_{obs} = \left(\frac{5,29 - 5}{\sqrt{0,25}}\right)\sqrt{15} = 2,24$

• $RR(\alpha = 0,05) = (-\infty; -1,96] \cup [1,96, +\infty)$ ✓

• Decisión. Luego como $T_{obs} \in RR(0,05)$, decido rechazar H_0 a nivel 0,05.

• Cálculo p-valor: Busco proba



$\phi(2,24) = 0,9875$

p-valor $= [1 - \phi(2,24)] \cdot 2 = \underline{0,025}$ ✓

Rechazo H_0 $\forall$ nivel mayor al p-valor, luego para p valores menores no rechazo, por ej $\alpha = 0,02$ ✓

considero $m = 15$ (ii) $\mathbb{P}_{\mu = 5,2}$(error tipo II) $= \mathbb{P}_{\mu=5,2}$(no rechazo H_0 cuando este es falso)

$= \mathbb{P}_{\mu=5,2}(-1,96 < T_m < 1,96) = \mathbb{P}_{\mu=5,2}\left(-1,96 < \frac{\sqrt{m}(\bar{X} - 5,2 + 5,2 - 5)}{\sqrt{0,25}} < 1,96\right) =$

$$\mathbb{P}_{\mu=5,2}\left(-1,96 < \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-5,2)}{\sqrt{0,25}} + \frac{0,2\sqrt{n}}{\sqrt{0,25}} < 1,96\right) = \mathbb{P}_{\mu=5,2}\left(\underbrace{-1,96 - \frac{0,2\sqrt{n}}{\sqrt{0,25}}}_{\star_2} < \underbrace{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-5,2)}{0,5}}_{\sim N(0,1)} < \underbrace{1,96 - \frac{0,2\sqrt{n}}{0,5}}_{\star_1}\right)$$

$$= \phi(\star_1) - \phi(\star_2) = \phi(0,4108) - \phi(-3,5092) = 0,6591 - (1-0,9998) = 0,6589$$

$\phi(0,41) = 0,6591$

$\phi(3,49) = 0,9998 \approx \phi(3,51)$

↳ considero.

$\boxed{\text{Luego, } \mathbb{P}_{\mu=5,2}(\text{error tipo 2}) = 0,659.}$

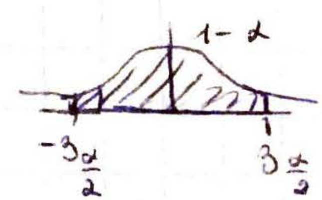
(iii) $IC(1-\alpha)$ para μ: $\left[\bar{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{0,5}{\sqrt{n}}\right]$ $\quad IC_{OBS}(0,95)$ para μ: $= \left[5,29 \pm 1,96 \frac{0,5}{\sqrt{15}}\right] = [5,037; 5,243]$

Es de nivel exacto.

Pivote: $\sqrt{n}\frac{(\bar{X}_n - \mu)}{\sqrt{\sigma^2}}$, donde $n=15$ $\sigma = 0,5$.

Tiene el nivel pedido dado que la probabilidad de atrapar a μ con el $IC(1-\alpha)$ es del 0,95, es decir:

$$\mathbb{P}\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sqrt{\sigma^2}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$



En particular, $1-\alpha = 0,95$ para el caso pedido. $(\alpha = 0,05)$