1/7

Libreta: [redacted] **Comisión de Práctica:** PATRICIA JANCSA. FR-14.

Nombre y Apellido: AGUSTÍN DELGER **Carrera:** Cs MATEMÁTICAS

SEGUNDO PARCIAL 12/7/2014

	1	2	3	4	Calificación
Tema 3	R/B	B/B	B	B	Aprob.

Ejercicio 1. Sea $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función de clase C^1 tal que $F(2,3) = (1,3)$ y $DF(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sean $G, H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dadas por $G(x,y) = (x^2 - xy, x+y)$ y $H = F \circ G$.

(a) Decidir si H es inversible en algún entorno del punto $(2,1)$.

(b) Sean $\gamma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\gamma(x,y) = 3x^2 + y$ y $K(x,y) = \gamma \circ H^{-1}(x,y)$. Hallar el polinomio de Taylor de orden 1 de K en el punto $(1,3)$.

Ejercicio 2. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2(x+3)^4 - y^2 + 3(x+3)^2$.

(a) Hallar, si existen, extremos locales y puntos silla de f en $\mathbb{R}^2$.

(b) Determinar si existen los máximos y mínimos absolutos de f en

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon (x+3)^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq -3\},$$

y en caso de que existan, encontrarlos.

Ejercicio 3. Analizar la convergencia de la siguiente integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-4}}\,dx.$$

Ejercicio 4. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ el cuadrilátero de vértices $(2,3), (4,7), (3,4), (5,8)$. Calcular

$$\int\!\!\int_A (-y+2x)\sin(\sqrt{y-x})\,dxdy.$$

Justificar todas las respuestas

2/7

AGUSTÍN DELGER - 38243126 - 276/14

EJERCICIO 1

a) CALCULO DH: COMO F y G SON DIFERENCIABLES (F POR SER CLASE C^1 y G POR SER SUMA Y PRODUCTO DE FUNCIONES DIFERENCIABLES EN SUS DOS TÉRMINOS) PODEMOS USAR LA REGLA DE LA CADENA.

$$DH(2,1) = DF(\overbrace{G(2,1)}^{(2,3)}) \cdot DG(2,1)$$

$$G(2,1) = (2^2 - 2\cdot 1, 2+1) = (2,3)$$

$$DG = \begin{pmatrix} 2x-y & -x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad DG(2,1) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ENTONCES $DH(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

SABEMOS QUE H ES DIFERENCIABLE POR SER COMPOSICIÓN DE FUNCIONES DIFERENCIABLES. PARA VER SI H ES INVERSIBLE EN ALGÚN ENTORNO DEL $(2,1)$, FALTA VER SI EL DETERMINANTE DE $DH(2,1)$ ES DISTINTO DE 0.

$$\det(DH(2,1)) = \det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2-(-3) = 5 \neq 0.$$

LUEGO, POR EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA, EXISTE UN ENTORNO ALREDEDOR DEL $(2,1)$ EN EL CUAL H ES INVERSIBLE.

b) PARA HALLAR EL POLINOMIO DE TAYLOR DE ÓRDEN 1 DE K EN EL PUNTO (1,3), VAMOS A NECESITAR LAS DERIVADAS PARCIALES DE K EN ES PUNTO. COMO φ Y H^{-1} SON DIFERENCIABLES (φ POR SER SUMA Y PRODUCTO DE FUNCIONES DIFERENCIABLES, H^{-1} PORQUE NOS LO ASEGURA EL T.F.INV, AL MENOS EN UN ENTORNO DE H(2,1).) PODEMOS USAR LA REGLA DE LA CADENA.

$$DK(1,3) = D\varphi(\overbrace{H^{-1}(1,3)}^{=(2,1)}) \cdot DH^{-1}(1,3).$$

PRIMERO, ASEGURÉMONOS QUE $H(2,1) = (1,3)$, PARA ESTAR SEGUROS QUE $H^{-1}(1,3)$ ES DIFERENCIABLE, POR EL T.F.INV.

$$H(x,y) = F \circ G(x,y) = F(G(x,y)) = F(x^2 - xy,\ x+y)$$

$$H(2,1) = F(4-2,\ 2+1) = F(2,3) = (1,3)$$

CALCULEMOS $D\varphi(2,1)$:

$$D\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad D\varphi(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 1 \end{pmatrix}$$

AHORA $DH^{-1}(1,3)$:

EL T.F.INV NOS DICE QUE $DF^{-1}(F(x,y)) = \left[DF(x,y)\right]^{-1}$.

POR LO TANTO: $DH^{-1}(1,3) = \left[DH(2,1)\right]^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1/2 F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & -1/2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{2^{F_2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/4 & 1/2 \end{array}\right)$$

AGUSTÍN DELGER - 38243126 - 276/14

LUEGO, $DK(1,3) = (12 \;\; 1) \cdot \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \left(11/4 \;\; 13/2 \right)$.

POR LO TANTO: $K_x(1,3) = 11/4$; $K_y(1,3) = 13/2$.

POR ÚLTIMO, FALTA HALLAR $K(1,3)$:

$$K(1,3) = \psi\left(H^{-1}(1,3)\right) = \psi(2,1) = 3.2^2 + 1 = 13.$$

CONSTRUYAMOS EL POLINOMIO DE TAYLOR CENTRADO EN $(1,3)$.

$$T(x,y) = K(1,3) + K_x(1,3)(x-1) + K_y(1,3)(y-3).$$

$$\boxed{T(x,y) = 13 + 11/4\,(x-1) + 13/2\,(y-3).}$$

4/7

AGUSTÍN DELGER - 38243126 - 276/14

EJERCICIO 2:

$$f(x,y) = 2(x+3)^4 - y^2 + 3(x+3)^2$$

a) COMO f ES DIFERENCIABLE POR SER UN POLINOMIO, BUSCO LOS PUNTOS CRÍTICOS DE f, QUE SERÁN LOS (x_0,y_0) TALES QUE $\nabla f(x_0,y_0) = 0$.

$$f_x(x,y) = 8(x+3)^3 + 6(x+3) = (x+3)\underbrace{\left(\underbrace{8(x+3)^2}_{\geq 0} + 6\right)}_{\geq 6}$$

$$(x+3)\left(8(x+3)^2 + 6\right) = 0 \iff x+3 = 0 \iff x = -3.$$

$$f_y(x,y) = -2y = 0 \iff y = 0$$

POR LO TANTO, EL ÚNICO PUNTO CRÍTICO ES EL $(-3,0)$

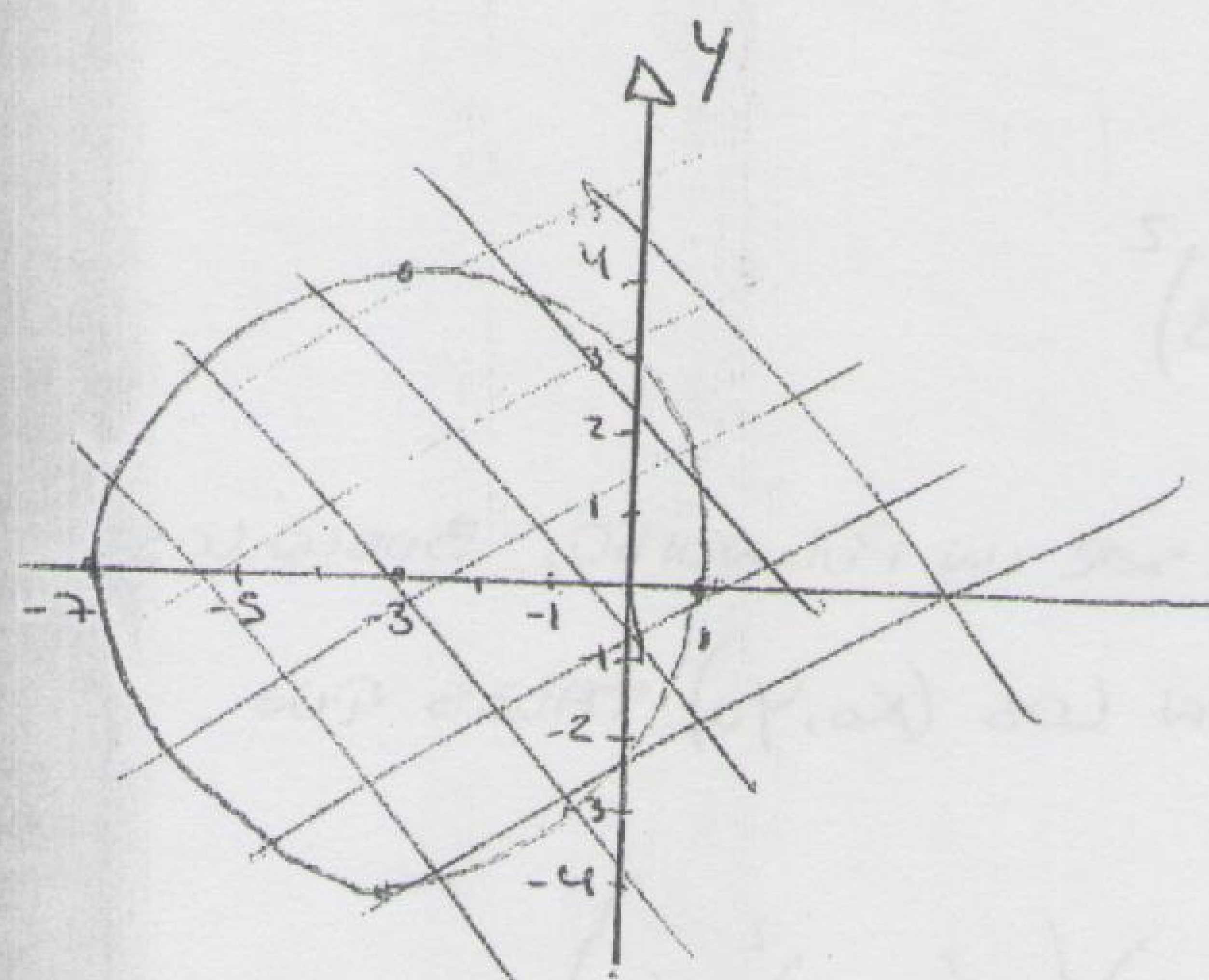
VEAMOS, A TRAVÉS DEL HESSIANO, SI SE TRATA DE UN EXTREMO LOCAL O UN PUNTO SILLA.

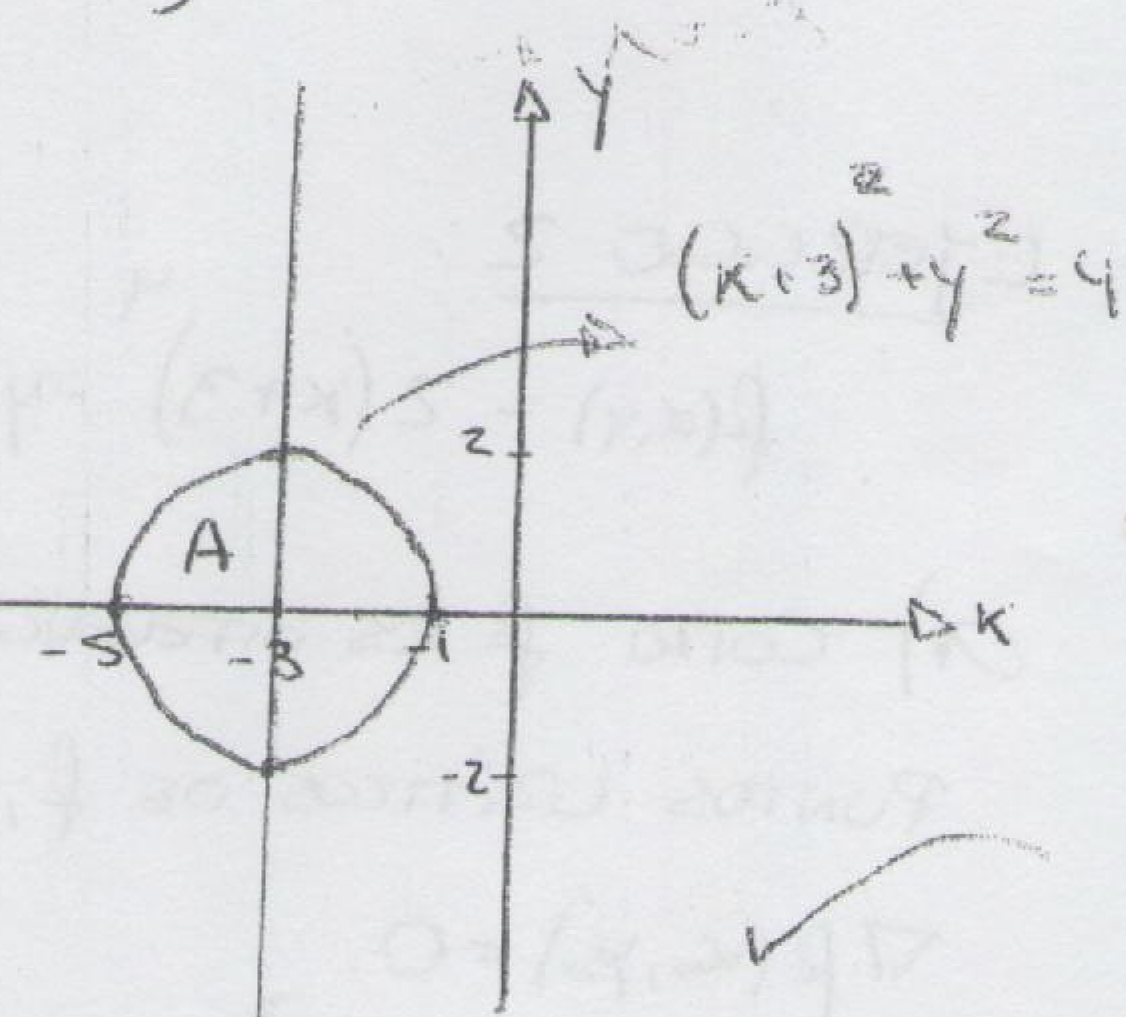
$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 24(x+3)^2+6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$Hf(-3,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad 6 > 0. \quad \det\left(Hf(-3,0)\right) = -12 < 0.$$

ESTO NOS INDICA QUE $Hf(-3,0)$ ES INDEFINIDA, POR LO CUAL HAY UN PUNTO SILLA EN $(-3,0)$

b). $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+3)^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq -3 \right\}$.





A ES UN CONJUNTO COMPACTO, POR LO CUAL PODEMOS ASEGURAR QUE EXISTEN MÁXIMO Y MÍNIMO ABSOLUTO DE f EN A. ADEMÁS, COMO YA BUSCAMOS PUNTOS CRÍTICOS EN $\mathbb{R}^2$ Y SOLO HALLAMOS UN PUNTO CRÍTICO EL CUAL NO SE ENCUENTRA EN EL INTERIOR DE A, SABEMOS QUE NO HABRÁ PUNTOS CRÍTICOS EN EL INTERIOR. ES POR ELLO QUE SOLO HACE FALTA BUSCAR EN EL BORDE. POR ÚLTIMO, COMO SOLO NOS INTERESAN EL MÁX. Y MÍN. ABSOLUTOS, UNA VEZ HALLADOS TODOS LOS PUNTOS CRÍTICOS, SOLO DEBO EVALUARLOS EN f Y VER CUAL ES EL MAYOR Y CUAL EL MENOR. ¡

COMENCEMOS!

BUSCO P. CRÍTICOS EN EL BORDE DE LA CIRCUNFERENCIA UTILIZANDO EL MULTIPLICADOR DE LAGRANGE: CONSIDERO LA RESTRICCIÓN

$g(x,y) = (x+3)^2 + y^2 - 4$.

BUSCO (x_0, y_0) TALES QUE $\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\nabla f(x,y) = \left((x+3)\left(8(x+3)^2 + 6\right),\ -2y \right)$.

$\nabla g(x,y) = \left(2(x+3),\ 2y \right)$

5/7

AGUSTÍN DELGER - 38243126 - 276/14.

$(x+3)\left(8(x+3)^2+6\right) = \lambda\, 2(x+3) \rightarrow x=-3$ CASO 1

SI $x \neq -3$ $\quad 8(x+3)^2+6 = \lambda . 2$

$4(x+3)^2+3 = \lambda \Rightarrow$ CASO 2 NO DICE NADA

$-2y = \lambda 2y \rightarrow y=0.$ CASO 3.

SI $y \neq 0$ $\quad -2 = \lambda . 2$

$-1 = \lambda \Rightarrow$ CASO 4

CASO 1: $x=-3$: $\quad (x+3)^2+y^2=4 \Rightarrow y^2=4 \Leftrightarrow y = \pm 2.$

PUNTOS CRÍTICOS $(-3,-2),(-3,2) \in A$
$\in A$

CASO 3 $y=0$: $\quad (x+3)^2+y^2=4 \Rightarrow (x+3)^2=4 \Leftrightarrow |x+3|=2$

$\Leftrightarrow x=-1$ ó $x=-5.$

PUNTOS CRÍTICOS: $(-1,0),(-5,0)$
$\notin A$ $\quad \in A$

CASO 4: $\lambda=-1$: $\quad 1^{RA}$ $\cancel{(x+3)}\left(8(x+3)^2+6\right) = -1\, 2\cancel{(x+3)}$ $\quad x \neq -3$

$8(x+3)^2 = -8$

$(x+3)^2 = -1$ ABS!

HASTA AQUÍ: P. CRÍTICOS $(-3,-2),(-3,2),(-5,0)$

AHORA BUSCO PUNTOS CRÍTICOS EN LA RECTA $x=-3$.

CONSIDERO LA FUNCIÓN $h(y) = (-3,y)$.

ENTONCES $f \circ h_{(y)} = -y^2$

BUSCO PUNTOS CRÍTICOS ~~EN~~ EN $f \circ h$, QUE SERÁN AQUELLOS y_0

TALES QUE $(f \circ h)'(y_0) = 0.$

$(f \circ h)'(y) = -2y = 0 \iff y = 0.$

$\Rightarrow$ PUNTO CRÍTICO EN LA RECTA: $\underset{}{(-3,0)} \in A$. PODEMOS OBSERVAR QUE ESTE ES EL PUNTO CRÍTICO QUE HALLAMOS EN LA PARTE (a).

PUNTOS CRÍTICOS: $(-3,0), (-3,2), (-3,-2), (-5,0)$.

AHORA SOLO FALTA EVALUAR Y HALLAR EL MÍN. Y MÁX ABSOLUTOS

$f(-3,0) = 0$; $f(-3,2) = -2^2 = \boxed{-4}$ → MÍNS

$f(-5,0) = 2(-2)^4 + 3(-2)^2$; $f(-3,-2) = -(-2)^2 = \boxed{-4}$

$= 32 + 12 = \boxed{44}$ MÁX

EN CONCLUSIÓN: MÁX. ABSOLUTO DE f EN A: $(-5,0)$.

MÍNS. ABSOLUTOS DE f EN A: $(-3,2), (-3,-2)$

ACLARACIÓN: NUNCA ACLARÉ QUE LAS ESQUINAS, DONDE LA FUNCIÓN NO ES DIFERENCIABLE, SON NECESARIAMENTE PUNTOS CRÍTICOS, YA QUE NO TUVE QUE CONSIDERARLO PUES ESOS PUNTOS YA HABÍAN SURGIDO COMO PUNTOS CRÍTICOS EN LA CIRCUNFERENCIA.

6/7

AGUSTÍN DELGER - 38243126 - 276/14.

EJERCICIO 3: LA INTEGRAL TIENE PROBLEMAS EN 2 Y $+\infty$

POR LO TANTO: $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-4}}\,dx = \underbrace{\int_2^3 \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-4}}\,dx}_{A} + \underbrace{\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-4}}\,dx}_{B}$

$$\text{B} \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-4}}\,dx \leqslant \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3\sqrt{5}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx.$$

C.A

$$\sqrt{5} = \sqrt{3^2-4} \leqslant \underset{x\in[3,+\infty)}{\sqrt{x^2-4}} \Rightarrow \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-4}} \leqslant \frac{1}{x^3\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\int_3^{+\infty}\frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\int_3^{M}\frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \frac{-1}{2}x^{-2}\Big|_3^M = \lim_{M\to+\infty} -\frac{1}{2.M^2} + \frac{1}{2.3^2}$$

$$= (\sqrt{5})^{-1}.\frac{1}{18} < +\infty.$$

COMO $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3\sqrt{5}}\,dx$ CONVERGE, POR EL CRITERIO DE COMPARACIÓN, $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-4}}\,dx$ TAMBIÉN CONVERGE.

A $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-4}}\,dx$. COMPARO, MEDIANTE EL CRITERIO DEL COCIENTE

CON $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$.

$$\lim_{x\to2} \frac{\dfrac{1}{x^3\sqrt{x^2-4}}}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}} = \lim_{x\to2} \frac{\cancel{\sqrt{x^2-4}}}{x^4\cancel{\sqrt{x^2-4}}} = \lim_{x\to2}\frac{1}{x^4} = \frac{1}{16} < +\infty.$$

COMO EL LÍMITE DE LA DIVISIÓN DIO MENOR A $+\infty$, AMBAS INTEGRALES TIENEN EL MISMO COMPORTAMIENTO.

ESTUDIO $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$.

$$\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = \lim_{N\to 2} \int_N^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = \lim_{N\to 2} \sqrt{x^2-4}\Big|_N^3 = \lim_{N\to 2} \sqrt{3^2-4} - \overbrace{\sqrt{N^2-4}}^{\to 0} = \boxed{\sqrt{5}} < +\infty$$

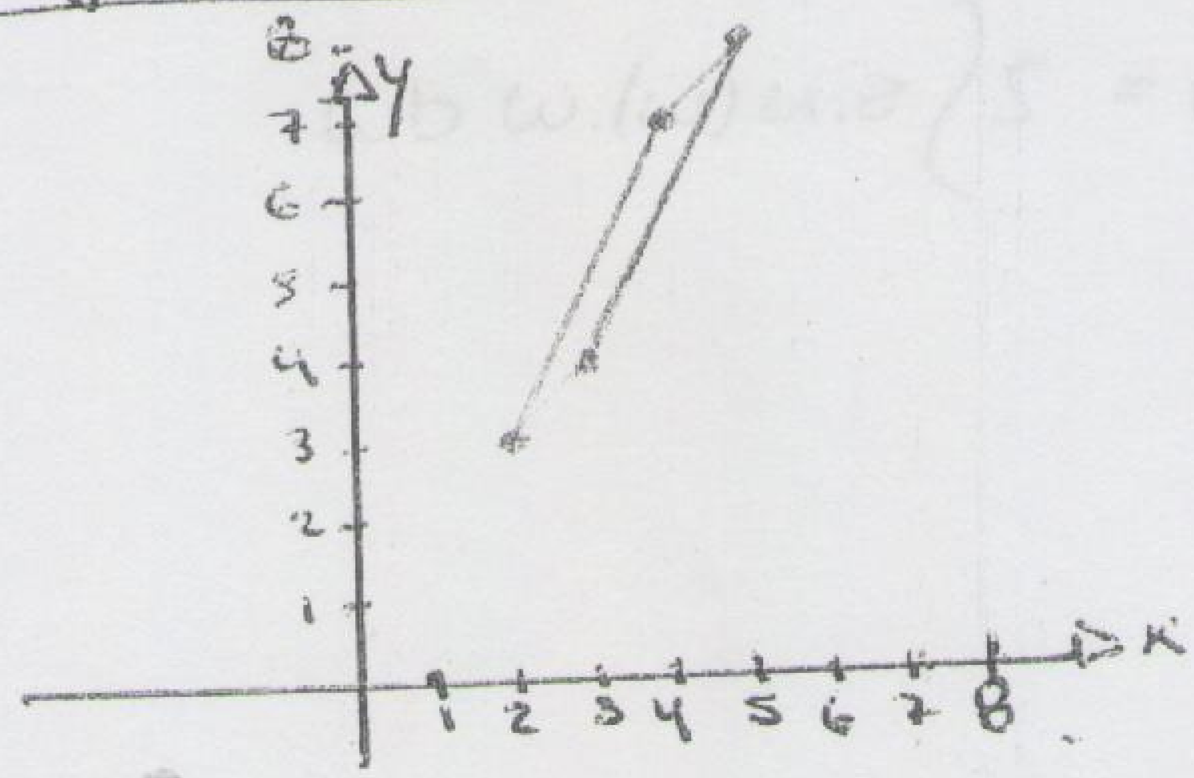
LUEGO, POR EL CRITERIO DEL COCIENTE, COMO $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$ CONVERGE, $\int_2^3 \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-4}}\,dx$ TAMBIÉN LO HACE.

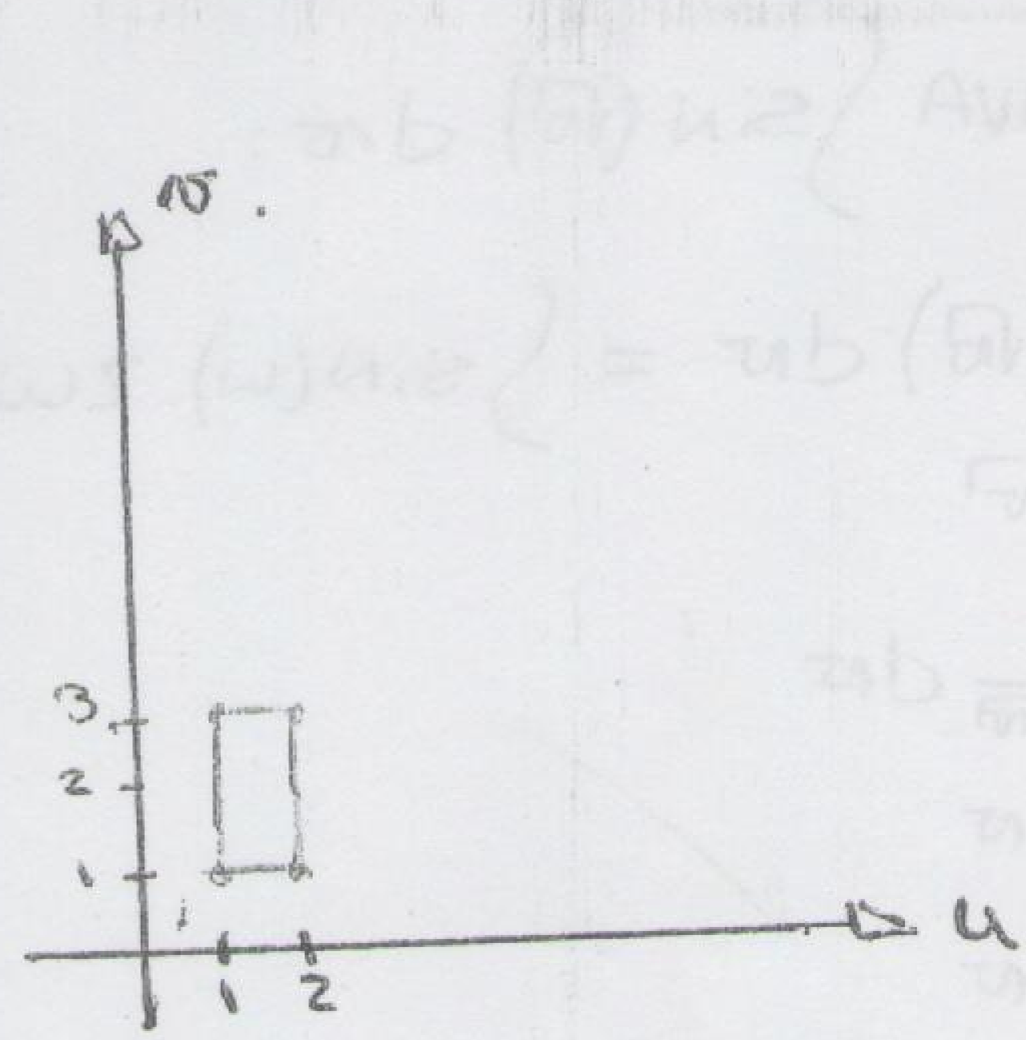
EN RESUMEN, COMO TANTO LA PARTE (A) COMO LA PARTE (B) CONVERGEN, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-4}}\,dx$ CONVERGE.

7/7

AGUSTÍN DELGER - 38243126 - 276/14

EJERCICIO 4:





CAMBIO DE VARIABLES: SEA T UNA T.L. $T(x,y) = (2x-y, y-x)$

$u = 2x - y$

$v = y - x$

$$JT = \left|\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right| = |2-1| = 1$$

$T(2,3) = (1,1)$

$T(4,7) = (1,3)$

$T(3,4) = (2,1)$

$T(5,8) = (2,3)$

EL JACOBIANO DE T ES 1, POR LO TANTO NO HAY VARIACIÓN DE ÁREA CON LA TRANSFORMAC... LINEAL.

$$\iint_A (-y+2x)\sin(\sqrt{y-x})\,dx\,dy \overset{T.C.V}{=} \iint_{T(A)} u\cdot\sin(\sqrt{v})\,du\,dv =$$

$$= \int_1^2\int_1^3 u\cdot\sin(\sqrt{v})\,dv\,du = \int_1^2 u\,du \cdot \int_1^3 \sin(\sqrt{v})\,dv = \cancel{\left(\frac{u}{2}\right)\Big|_1^2}$$

C.A.

$$= \left[\frac{u^2}{2}\Big|_1^2\right]\cdot\left[2\left(-\cos(\sqrt{v})\cdot\sqrt{v} + \operatorname{sen}(\sqrt{v})\right)\Big|_1^3\right]$$

$$= \left(\frac{4-1}{2}\right)2\left[-\cos(\sqrt{3})\sqrt{3} + \operatorname{sen}(\sqrt{3}) - \left(-\cos(1)\cdot 1 + \operatorname{sen} 1\right)\right] =$$

C.A:

PRIMITIVA $\int \sin(\sqrt{v})\,dv$:

$$\int \sin(\sqrt{v})\,dv = \int \sin(w).2w\,dw = 2\int \sin(w).w\,dw$$

$w = \sqrt{v}$

$dw = \frac{1}{2\sqrt{v}}\,dv$

$dw.2\sqrt{v} = dv$

$dw.2w = dv$

$$2\int \sin(w).w\,dw \overset{\text{PARTES}}{=} 2\left[-\cos(w).w - \int -\cos(w)\,dw\right] =$$

$r' = \sin(w)$ $\quad r = -\cos w$

$s = w$ $\quad s' = 1$

$$= 2\left[-\cos(w).w + \operatorname{sen}(w)\right] = \boxed{2\left[-\cos(\sqrt{v}).\sqrt{v} + \operatorname{sen}(\sqrt{v})\right] + C}$$