Probabilidad y Estadística para Computación Primer Parcial 2do Cuatrimestre 2009

2

TEMA 1

Nombre y apellido [redacted] Número de libreta [redacted]

Turno(tachar lo que no corresponda) : Tarde: Ma-Ju 14 a 17 hs. ~~Noche: Ma-Ju 19 a 22 hs.~~

Por favor, al finalizar el examen señale claramente aquí qué ejercicios entrega

Entrego ejercicios 1 2 3 4 # HOJAS ENTREGADAS : 5

Aprobado

(Reservado para el corrector):

1	2	3	4	Nota
20	15	20	27	82

Por favor, resuelva cada ejercicio en hojas separadas. Numere todas las hojas y coloque en cada una su nombre y apellido. *Para aprobar es necesario tener al menos 60 puntos. Justifique todas sus respuestas.*

1. *(20 puntos)* La urna A contiene 3 bolitas negras y 1 blanca, la urna B contiene 3 bolitas blancas y 1 negra. Se extraen al azar 2 bolitas de la urna A *con reposición* y 2 bolitas de la urna B *sin reposición.*

   (a) *(10 p)* Hallar la probabilidad de que salgan exactamente dos bolitas blancas entre las 4 extraídas.

   (b) *(10 p)* Hallar la probabilidad de que salga alguna bolita negra.

2. *(20 puntos)* En cada página de una enciclopedia digital hay exactamente 3000 caracteres, y se estima que, en promedio, se produce un error cada 25000 caracteres. La distribución del número de errores por página se puede aproximar por una distribución de Poisson. Se supone que la cantidad de errores en una página es independiente de la cantidad de errores en cualquier otra página de la enciclopedia.

   (a) *(6 p)* Calcular la probabilidad de que en una página haya al menos un error.

   (b) *(7 p)* Si se revisan las páginas una a una, ¿cuál es la probabilidad de que la 5ta. página revisada sea la primera que contiene al menos un error?

   (c) *(7 p)* Un corrector revisará 7 páginas de la enciclopedia. Calcular la probabilidad de que haya exactamente 3 páginas sin ningún error.

3. *(30 puntos)* La variable aleatoria X representa la duración en horas por mes de la conexión a Internet de un empleado de una empresa con sitios web "no relacionados con el trabajo". Se supone que X sigue una distribución exponencial con parámetro λ

   (a) *(4 p)* Hallar el valor de λ sabiendo que la probabilidad de que un empleado esté conectado a lo sumo 2 horas es $1 - e^{-1}$.

   (b) *(4 p)* Calcular el valor de a si se sabe que $P(0,5 < X < a) = 0,0915$.

(Este ejercicio continúa atrás)

(c) *(10 p)* En una oficina de esta empresa los empleados reciben, además del sueldo básico, un extra de 100 pesos, del cual se le descuentan 5 pesos por cada hora que el empleado se conectó a sitios web no relacionados con el trabajo. Pero si el empleado pasó 20 horas ó más conectado a esos sitios en un mes, no recibe el extra. ¿Cuántos pesos se espera que un empleado reciba de extra?

(d) *(7 p)* En otra oficina de esta empresa, si un empleado se conecta a sitios web no relacionados con el trabajo, se lo sanciona con una multa de $Y = X^2$ pesos. Hallar la función de densidad de probabilidad de la variable Y.

(e) *(5 p)* Sea la variable aleatoria $W = 2 + bX$. Determinar todos los números reales b tales que $V(W) \leq 64$.

4. *(30 puntos)* Dos máquinas producen corchos para tapar ciertos envases de vidrio. La máquina 1 produce corchos con diámetros normalmente distribuídos, con media 3,04 cm y desvio estándar 0,1 cm. La máquina 2 produce corchos cuyo diámetro es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = (0,2x + 0,5)I_{[2;3]}(x).$$

Un corcho se considera "aceptable" si su diámetro está entre 2,9 y 3,1 cm . Se sabe que la máquina 1 produce el triple de corchos que la máquina 2.

(a) *(10 p)* Para la variable: "Diámetro de un corcho producido por la máquina 2", calcular su función de distribución acumulada, su valor esperado, y su varianza.

(b) *(12 p)* Calcular la probabilidad de que un corcho extraído de la producción total sea "aceptable".

(c) *(8 p)* Se seleccionó un corcho al azar y resultó "aceptable" ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la máquina 1?

1.

3N 1B	3B 1N
A	B

4 bolitas: 2 de la urna A c/repo; 2 " " " B s/repo

C : # bolitas blancas obtenidas en las 4 extracciones

Y: # bolitas blancas de entre las 2 sacadas de la urna A $\sim Bi\left(2, \frac{1}{4}\right)$

Z: # bolitas blancas de entre las 2 sacadas de la urna B $\sim \mathcal{H}(4,3,2)$

(a)

$$P(X=2) \overset{\text{PROBA TOTAL}}{=} P(Y=0 \cap Z=2) + P(Y=1 \cap Z=1) + P(Y=2 \cap Z=0) \underset{\substack{X,Y \\ \text{son} \\ \text{indep}}}{=} P(Y=0)P(Z=2) + P(Y=1)P(Z=1) + \underbrace{P(Y=2)P(Z=0)}_{0} = \binom{2}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} + \binom{2}{1}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}}$$

0 pues al extraer ~~con~~ repo y haber solo una bol negra al menos

$$= \frac{9}{32} + \frac{3}{16} = \frac{15}{32}$$

Usaste resultados posteriores pero está ok!

[redacted]

(b) W: # bolitas negras obtenidas en las 4 extracc

$$P(W\geq 1) = 1 - P(W=0) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

$$P(W=0) = P(Y=2 \cap Z=2) = P(Y=2)P(Z=2)$$

$$= \binom{2}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^0 \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{32}$$

B

[redacted] 15 HOJA N° 2

FECHA

2. X: # errores por pág $\overset{(a)}{\sim} \mathcal{P}(\lambda) = X_{(a)}$

$\frac{1}{2500}$

$X \sim Bi(3000, 0.12)$ X

POR EL HINT DE ALEJANDRA

$E(X) \overset{L}{=} E(X_{(a)})$

Sí, era lo que decía, pero no está correcto el 'p' de la binomial

$3000 * 0.12 = \lambda$

$\lambda = 360$ X

(a) $P(X \geq 1) \underset{\text{NO es un =}}{\simeq} 1 - P(X=0)$

$= 1 - \frac{(360)^0}{0!} e^{-360} = 1 - e^{-360}$ ok

(b) Y: # págs revisadas hasta encontrar la 1° con al menos un error

$Y \sim \mathcal{G}(1 - e^{-360})$ ✓

$P(Y=5) = (1 - e^{-360})(e^{-360})^4$ ok (arrastra error)

(c) W: # págs sin errores de las 7 revisadas

$W \sim Bi(7, e^{-360})$ ✓

$P(W=3) = \binom{7}{3}(e^{-360})^3(1 - e^{-360})^4$ ✓

(arrastra error)

NOTA

[redacted]

HOJA N° 3

FECHA

3. $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

(a) $P(X \leq 2) = 1 - e^{-1}$

$$\cancel{1} - e^{-\lambda 2} = \cancel{1} - e^{-1}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

B

(b) $P(0.5 < X < a) = 0.0915$

$$F_X(a) - F_X(0.5) = 0.0915$$

$$\cancel{1} - e^{-\frac{1}{2}a} - \cancel{1} + e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 0.0915$$

$$e^{-\frac{1}{2}a} = -0.0915 + e^{-\frac{1}{4}}$$

B

$$-\frac{1}{2}a = \ln\left(-0.0915 + e^{-\frac{1}{4}}\right)$$

$$a = -2\ln\left(-0.0915 + e^{-\frac{1}{4}}\right)$$

(c) $P = \begin{cases} 100 - 5X & 0 \leq X < 20 \\ 0 & X \geq 20 \end{cases}$ (*)

P: Extra en pesos

$$E(P) = E(100 - 5X) = 100 - 5E(X)$$

$$= 100 - 5 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cancel{= 90}$$

No, Mirá cómo lo definiste en (*)

$$E(P) = \int_0^{\infty} (100 - 5x)\, I_{(0,20)}(x)\, \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}\, dx$$

NOTA

[redacted]

(d) $Y = X^2$

$$F_Y(y) = P(X^2 \le y) \overset{y \ge 0}{=} P(|X| \le \sqrt{y})$$

$$= F_X(\sqrt{y}) - \underbrace{F_X(-\sqrt{y})}_{0}$$

0 pues $-\sqrt{y} \notin [0,+\infty)$

$$f_Y(y) \overset{y>0}{=} f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} I_{(0,+\infty)}(\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{y}} I_{(0,+\infty)}(\sqrt{y})$$

$$0 < \sqrt{y}$$
$$0 < y$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{y}} I_{(0,+\infty)}(y)$$ B

(e) $W = 2 + bX$

$$V(2 + bX) \le 64$$
$$b^2 V(X) \le 64$$
$$b^2 \, 4 \le 64$$
$$b^2 \le 16$$
$$-4 \le b \le 4 \qquad b \in \mathbb{R}$$ B

[redacted] (27) N° 4

FECHA

1. X : Diámetro de un corcho produc por la máquina 2 ~~[illegible]~~

Y : Diám de un corcho produc por la máquina 1 $\sim N(3.04, (0.1)^2)$

M_1: El corcho fue produc por la máq 1

$$P(M_1) = \frac{3}{4}$$

(a) * Acumulada

$$t < 2 \Rightarrow F_X(t) = 0$$

$$t \in [2,3] \Rightarrow F_X(t) = \int_2^t (0.2x + 0.5)\,dx$$

$$= \left[0.2\frac{x^2}{2} + 0.5x\right]_2^t = 0.2\frac{t^2}{2} + 0.5t - 1.4$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ 0.1t^2 + 0.5t - 1.4 & 2 \leq t \leq 3 \\ 1 & t > 3 \end{cases}$$

* Esperanza

$$E(X) = \int_2^3 x(0.2x + 0.5)\,dx$$

$$= \left[0.2\frac{x^3}{3} + 0.5\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = \frac{151}{60}$$

NOTA

[redacted]

* Varianza

$$E(X^2) = \int_2^3 x^2 (0.2x + 0.5)\, dx$$

$$= \left[0.2 \frac{x^4}{4} + 0.5 \frac{x^3}{3} \right]_2^3$$

$$= \frac{77}{12}$$

$$V(X) = \frac{77}{12} - \left(\frac{151}{60}\right)^2$$ ✓

P TOTAL ✓
PRODUCTO

(b) $P(\text{"aceptable"}) = P(2.9 < X < 3.1 \mid M_1^c) \cdot P(M_1^c) + P(2.9 < Y < 3.1 \mid M_1)\, P(M_1)$

$$= \underbrace{\left(\int_{2.9}^{3.1} 0.2x + 0.5\, dx \right)}_{\text{NO}} \frac{1}{4} + \left[\phi(0.6) - \phi(-1.4) \right] \frac{3}{4}$$

$$= \left[0.2 \frac{x^2}{2} + 0.5x \right]_{2.9}^{3.1} \frac{1}{4} + (0.7257 - 1 + 0.9192) \frac{3}{4}$$ ✗ ✓

$$= 0.22 * \frac{1}{4} + 0.6449 * \frac{3}{4}$$ ✗ ✓ ✓ ✓

~~[illegible]~~

$$= 0.538675$$

[redacted]

HOJA Nº 3

FECHA

(c)

$$P(M_1 \mid \text{"aceptable"}) \overset{\text{BAYES}}{=} \frac{P(\text{"aceptable"} \mid M_1)\,P(M_1)}{P(\text{"aceptable"})}$$

$$= \frac{0.6449 * \frac{3}{4}}{0.538675} = 0.897898$$ ✓ (arrastra error)

NOTA

HOJA Nº

FECHA

(2) 1

2ºC 09

1. | 3N 1B | A | 3B 1N | B

Se sacan → 2 de A con repo
→ 2 de B sin repo

X: # bolitas blancas extraídas de un total de 2 extracciones con repo

$$X \sim Bi\left(2, \frac{1}{4}\right)$$

Y: # bolitas blancas obtenidas en 2 extracciones sin repo

$$X \sim \mathcal{H}(4, 3, 2)$$

B: # bolitas obtenidas en las 4 extracciones

NOTA

a)

$$P(B=2) = P(X=2 \cap Y=0) + P(Y=1 \cap X=1)$$

$$+ P(X=0 \cap Y=2)$$

$$= \sum_{i=0}^{2} P(X=2-i)P(Y=i)$$

$$= \binom{2}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^0 * 0 + \binom{2}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^1 * \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}}$$

$$+ \binom{2}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^2 * \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}}$$

$$= \cancel{2} * \frac{3}{16} * \frac{3}{\cancel{6}} + \frac{9}{16} * \frac{\cancel{3}}{\cancel{6}\,2} = \frac{15}{32}$$

b)

$$P(B \leq 3) = 1 - P(B > 3)$$

$$= 1 - P(B=4)$$

$$= 1 - P(X=2)P(Y=2)$$

$$= 1 - \binom{2}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^0 * \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{32}$$

$$= \frac{31}{32}$$

NOTA

X: # caracteres con error de un total de 3000

$$X \sim Bi\left(3000, \frac{1}{25000}\right)$$

$$\cancel{X_{(a)}} \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

$$E(X) = E(X_{(a)})$$

$$\frac{3\cancel{000}}{25\cancel{000}} = \lambda$$

$$\frac{3}{25} = \lambda$$

a) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$

$$= 1 - P(X = 0)$$

$$= 1 - \frac{\left(\frac{3}{25}\right)^0 e^{-\frac{3}{25}}}{0!}$$

$$= 1 - e^{-\frac{3}{25}}$$

b) Y: # páginas revisadas hasta la 1° con errores

$$Y \sim G\left(1 - e^{-\frac{3}{25}}\right)$$

$$P(Y = 5) = \left(e^{-\frac{3}{25}}\right)^4 \left(1 - e^{-\frac{3}{25}}\right)^1$$

c) W: # páginas sin errores de un total de 7 revisadas

$$W \sim Bi\left(7, e^{-\frac{3}{25}}\right)$$

$$P(W=3) = \binom{7}{3}\left(e^{-\frac{3}{25}}\right)^3\left(1-e^{-\frac{3}{5}}\right)^4$$

4.

M_1: El corcho fue producido por la máquina 1

$$P(M_1) = \frac{3}{4}$$

X_1: diám del corcho producido por la máquina 1

X_2: diám del corcho producido por la máquina 2

$$X_1 \sim N(3.04, 0.01)$$

X_2 tiene func de densidad

$$f_{X_2}(x) = (0.2x + 0.5)\, I_{[2,3]}(x)$$

A: El corcho es aceptable (diám entre 2.9 y 3.1 cm

NOTA

HOJA Nº

FECHA

② 3

a)

si $2 \leq x \leq 3 \Rightarrow F_{X_2}(x) = \int_2^x 0.2t + 0.5\, dt$

$= \left[\frac{2}{10}\frac{t^2}{2} + 0.5t\right]_2^x = \frac{x^2}{10} + \frac{1}{2}x - \frac{2}{5} - 1 = \frac{x^2}{10} + \frac{1}{2}x - \frac{7}{5}$

$$F_{X_2}(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{x^2}{10} + \frac{1}{2}x - \frac{7}{5} & 2 \leq x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

$E(X_2) = \int_2^3 x\left[0.2x + 0.5\right] dx$

$= \left[\frac{2}{30}x^3 + \frac{1}{4}x^2\right]_2^3 = \frac{151}{60}$

$E(X_2^2) = \int_2^3 x^2(0.2x + 0.5)\, dx$

$= \left[\frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{6}x^3\right]_2^3 = \frac{77}{12}$

$V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = \frac{77}{12} - \left(\frac{151}{60}\right)^2$

NOTA

$$P(A) = P(A|M_1)P(M_1) + P(A|M_1^c)P(M_1^c)$$

$$= \left(\int_{2.9}^{3} 0.2x + 0.5\,dx\right)\frac{1}{4} + P(2.9 < X_2 < 3)\,\frac{3}{4}$$

$$= \left[\frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_{2.9}^{3} \frac{1}{4} + \frac{3}{4}P\left(\frac{2.9-3.04}{0.1} < \underbrace{\frac{X_2-3.04}{0.1}}_{\sim N(0,1)} < \frac{3.1-3.04}{0.1}\right)$$

$$= \frac{109}{1000} * \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\phi(0.6) - \phi(-1.4)\right)$$

$$= \frac{109}{1000} * \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\phi(0.6) - 1 + \phi(1.4)\right)$$

$$= \frac{109}{1000} * \frac{1}{4} + \frac{3}{4} * \left(0.7257 - 1 + 0.9192\right)$$

$$= 0.510925$$

c) $$P(M_1|A) = \frac{P(A|M_1)P(M_1)}{P(A)} = \frac{0.6449 * \frac{3}{4}}{0.510925}$$

② 4

3. $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

a) $P(X \leq 2) = 1 - e^{-1}$

$$F_X(2) = 1 - e^{-1}$$

$$\cancel{1} \cancel{-} e^{-\lambda 2} = \cancel{1} \cancel{-} e^{-1}$$

$$-\lambda 2 = -1$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

b) $P(0.5 < X < a) = 0.0915$

X v.a cont

$$F_X(a) - F_X(0.5) = 0.0915$$

$$\cancel{1} - e^{-\frac{1}{2}a} - \cancel{1} + e^{-\frac{1}{4}} = 0.0915$$

$$e^{-\frac{1}{2}a} = -0.0915 + e^{-\frac{1}{4}}$$

$$-\frac{1}{2}a = \ln\left(-0.0915 + e^{-\frac{1}{4}}\right)$$

$$a = -2 \ln\left(-0.0915 + e^{-\frac{1}{4}}\right)$$

c) P = Extra en pesos

$$P(X) = \begin{cases} 100 - 5X & 0 \leq X < 20 \\ 0 & X \geq 20 \end{cases}$$

$$E(P) = E(100-5X) = \int_0^{20} (100-5x)\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx$$

$$= \left[-100e^{-\frac{1}{2}x} - 5\int \frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}dx\right]_0^{20}$$

$u = x \quad du = 1$

$dv = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \quad v = -e^{-\frac{1}{2}x}$

$$= \left[-100e^{-\frac{1}{2}x} - 5\left(-xe^{-\frac{1}{2}x} + \int e^{-\frac{1}{2}x}\right)\right]_0^{20}$$

$$= \left[-100e^{-\frac{1}{2}x} + 5xe^{-\frac{1}{2}x} + 10e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^{20}$$

$$= \left[-90e^{-\frac{1}{2}x} + 5xe^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^{20} = 90.000454$$

d) $Y = X^2$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$$

$$\underset{y \geq 0}{=} F_X(\sqrt{y}) - \underbrace{F_X(-\sqrt{y})}_{0}$$

$X \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y})$$

② 5

$$f_X(\sqrt{y}) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{y}} \iff \sqrt{y} > 0$$

$$y > 0$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{y}} \; I_{(0,+\infty)}(y)$$

e) $V(W) \leq 64$

$$V(bX+2) \leq 64$$

$$b^2 \underbrace{V(X)}_{\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2 = 4} \leq 64$$

$$b^2 4 \leq 64$$

$$b^2 \leq 16$$

$$|b| \leq 4 \quad , b \in \mathbb{R}$$