Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Segundo parcial (25/11/2023) - 2do. cuatrimetre 2023

TEMA 4

1 (2,5 pts.)	2 (2,5 pts.)	3 (2,5 pts.)	4 (2,5 pts.)	Nota
B	B	B	B	10

Apellido: Kiszkurno
Nombre: Nicolás

Nro. de libreta:
Carrera: Lic. en Ciencias de Datos

Nro de práctica: 1

6 hojas

1. Sea g una función de clase C^2 cuyo polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(1,2)$ es

$$T_g(x,y) = 2y^2 + 3xy - 11y + 3x^2 - 12x + 20.$$

a) Probar que $g(x,y)$ tiene un punto crítico en $(1,2)$ y clasificarlo.

b) Suponiendo que $g(x,y) = \ln(f(x,y)) + 3$, con f una función de clase C^2. Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x,y)$ centrado en $(1,2)$.

2. Hallar los extremos absolutos de $f(x,y) = -5xy + x^2 + y^2 - 4$, en la región

$$D = \{(x,y) \quad x^2 + y^2 \leq 1,\ y \leq 0\}.$$

3. *a*) Calcule la integral

$$\int_0^1 \int_{2y}^2 8e^{2x^2+1}\,dx\,dy$$

b) Halle el volumen del sólido encerrado por el plano $z = 3 - y$ y la superficie $x = y^2$ en el primer octante.

4. Sea W el sólido comprendido por las superficies $z - 2 = x^2 + y^2$ y $z = -\sqrt{x^2 + y^2} + 4$.

Calcular

$$\iiint_W \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dV.$$

Escribir todos los razonamientos que justifican las respuestas.

Nicolás Kiszkurno | HOJA N° 1 | FECHA 25/11/23

1) Sea g una función de clase C^2 cuyo polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(1,2)$ es

$$T_g(x,y) = 2y^2 + 3xy - 11y + 3x^2 - 12x + 20$$

a) Probar que $g(x,y)$ tiene un punto crítico en $(1,2)$ y clasificarlo.

b) Suponiendo que $g(x,y) = \ln[f(x,y)] + 3$, con f una función de clase C^2. Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de f centrado en $(1,2)$

---

a)

Como $g \in C^2$ en $(1,2)$, sé que el polinomio de Taylor de orden 2 de g centrado en $(1,2)$ es de la forma

$$T_g(x,y) = g(1,2) + g_x(1,2)(x-1) + g_y(1,2)(y-2) + \frac{1}{2} g_{xx}(1,2)(x-1)^2 + g_{xy}(1,2)(x-1)(y-2) + \frac{1}{2} g_{yy}(1,2)(y-2)^2$$

Voy a buscar expresar a T_g como suma y producto entre $(x-1)$ y $(y-2)$ para igualar por coeficientes en cada término. Para ello, calculo el polinomio de Taylor de orden 2 de T_g centrado en $(1,2)$. Como T_g es un polinomio de orden 2, sé que su polinomio de Taylor de orden 2 será otra expresión equivalente de T_g.

$$T_{g_x}(x,y) = 3y + 6x - 12 \Rightarrow T_{g_x}(1,2) = 0$$

$$T_{g_y}(x,y) = 4y + 3x - 11 \Rightarrow T_{g_y}(1,2) = 0$$

NOTA

$T_{g_{xx}}(x,y) = 6 \Rightarrow T_{g_{xx}}(1,2) = 6$
$T_{g_{xy}}(x,y) = 3 \Rightarrow T_{g_{xy}}(1,2) = 3$
$T_{g_{yy}}(x,y) = 4 \Rightarrow T_{g_{yy}}(1,2) = 4$

Faltó aclarar que, por ser T_g un polinomio, es dos veces diferenciable. Además, T_g es de clase C^2, por lo que $T_{g_{xy}} = T_{g_{yx}}$.

Entonces, ahora tengo que, como $T_g(1,2) = 3$,

$$T_g(x,y) = 3 + 0(x-1) + 0(y-2) + \frac{1}{2}6(x-1)^2 + 3(x-1)(y-2) + \frac{1}{2}4(y-2)^2$$

Luego, igualando por coeficientes con mi expresión de T_g con las derivadas de g, tengo que

$g(1,2) = 3$, $g_x(1,2) = 0$, $g_y(1,2) = 0$,
$g_{xx}(1,2) = 6$, $g_{xy}(1,2) = 3$, $g_{yy}(1,2) = 4$.

Así, como $\nabla g(1,2) = (0,0)$, ahora sé que $(1,2)$ es un punto crítico de g. Voy a clasificarlo con el Criterio del Hessiano, pues g es de clase C^2 en $(1,2)$.

$$Hg(1,2) = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det Hg(1,2) = 6 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = 15$$

Luego, como $\det Hg(1,2) = 15 > 0$ y $g_{xx}(1,2) = 6 > 0$, por el Criterio del Hessiano, $(1,2)$ es un mínimo local de g.

$\therefore$ $(1,2)$ es un mínimo local de g. ▨

Nicolas Kiszkurno

HOJA N° 2

FECHA 25/11/23

1) b)

Como f es de clase C^2 en (1,2), puedo calcular su polinomio de Taylor de orden 2 centrado en (1,2) y será de la siguiente forma:

$$T_2(x,y) = f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2) +$$
$$+ \frac{1}{2} f_{xx}(1,2)(x-1)^2 + f_{xy}(1,2)(x-1)(y-1) + \frac{1}{2} f_{yy}(1,2)(y-2)^2$$

Voy a calcular cada coeficiente.

$$g(x,y) = \ln[f(x,y)] \Rightarrow g(1,2) = 3 = \ln[f(1,2)] \quad +3$$
$$\Rightarrow f(1,2) = 1$$

$$g_x(x,y) = \frac{f_x(x,y)}{f(x,y)} \Rightarrow g_x(1,2) = \frac{f_x(1,2)}{f(1,2)} \Rightarrow 0 = \frac{f_x(1,2)}{1}$$
$$\Rightarrow f_x(1,2) = 0$$

$$g_y(x,y) = \frac{f_y(x,y)}{f(x,y)} \Rightarrow g_y(1,2) = \frac{f_y(1,2)}{f(1,2)} \Rightarrow 0 = \frac{f_y(1,2)}{1}$$
$$\Rightarrow f_y(1,2) = 0$$

$$g_{xx}(x,y) = \frac{f(x,y)\, f_{xx}(x,y) - [f_x(x,y)]^2}{[f(x,y)]^2}$$
$$\Rightarrow g_{xx}(1,2) = \frac{f(1,2)\, f_{xx}(1,2) - [f_x(1,2)]^2}{[f(1,2)]^2} \Rightarrow 6 = \frac{1 \cdot f_{xx}(1,2) - 0^2}{1^2} \Rightarrow f_{xx}(1,2) =$$

$$g_{xy}(x,y) = \frac{f(x,y)\, f_{xy}(x,y) - f_x(x,y)\, f_y(x,y)}{[f(x,y)]^2}$$
$$\Rightarrow g_{xy}(1,2) = \frac{f(1,2)\, f_{xy}(1,2) - f_x(1,2)\, f_y(1,2)}{[f(1,2)]^2}$$
$$\Rightarrow 3 = \frac{1 \cdot f_{xy}(1,2) - 0 \cdot 0}{1^2} \Rightarrow f_{xy}(1,2) = 3$$

$$g_{yy}(x,y) = \frac{f(x,y)\, f_{yy}(x,y) - [f_y(x,y)]^2}{[f(x,y)]^2}$$
$$\Rightarrow g_{yy}(1,2) = \frac{f(1,2)\, f_{yy}(1,2) - [f_y(1,2)]^2}{[f(1,2)]^2}$$
$$\Rightarrow 4 = \frac{1 \cdot f_{yy}(1,2) - 0^2}{1^2} \Rightarrow f_{yy}(1,2) = 4$$

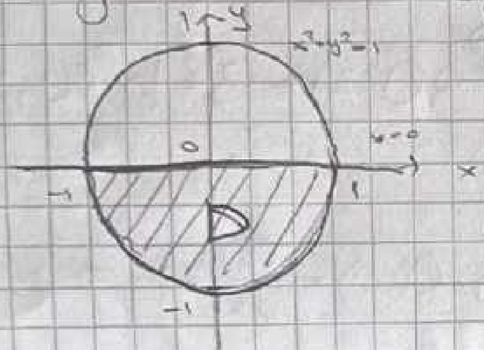
∴ El Polinomio de Taylor de orden 2 de f centrado en (1,2)
es $T_2(x,y) = 1 + 0(x-1) + 0(y-2) + \frac{1}{2}\cdot 6(x-1)^2 + 3(x-1)(y-2) + \frac{1}{2}\cdot 4(y-2)^2$

$\Rightarrow T_2(x,y) = 1 + 3(x-1)^2 + 3(x-1)(y-2) + 2(y-2)^2$ ■

---

2) Hallar los extremos absolutos de $f(x,y) = -5xy + x^2 + y^2 - 4$
en la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \le 1 \wedge y \le 0\}$

Primero voy a graficar la región.



D es un semicírculo de radio 1 con centro en el origen.
Notar que $bd(D) \subseteq D$, por lo que D es cerrado.
Además, $\|(x,y)\| \le 1 \ \forall (x,y) \in D$, por lo que D está acotada. Luego, D es compacto.
Como f es un polinomio, es de clase "C^∞" en D. Entonces, por el Teorema de Weierstrass, la imagen de $f|_D$ está acotada y f alcanzará máximos y mínimos absolutos en D. Voy a analizar primero el interior de D y luego su borde.

Interior.
Como f es de clase "C^∞", aplica el Teorema de Fermat.

Nicolás Kiszkurno

HOJA Nº 3

FECHA 25/11/23

2)

Luego, sea $P \in \mathbb{R}^2$ un extremo local de f. Entonces, $\nabla f(P) = (0,0)$. Busco $(x_0, y_0) \in D$ / $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$. Para ello, primero calculo sus derivadas parciales.

$f_x(x,y) = -5y + 2x$, $f_y(x,y) = -5x + 2y$

Luego, $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0) \Leftrightarrow -5y_0 + 2x_0 = 0 \wedge$
$\wedge -5x_0 + 2y_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{5}{2} y_0 \wedge x_0 = \frac{2}{5} y_0$
$\Rightarrow \frac{5}{2} y_0 = \frac{2}{5} y_0 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$.

Entonces, el único punto crítico de f en $\mathbb{R}^2$ es (0,0). Pero como $(0,0) \in bd(D)$, no lo considero todavía. Luego, no hay más puntos a considerar en el interior de D.

Borde

Voy a realizar una partición de bd(D) en dos curvas.

?

$C_1 := Im(r_1)$ donde $r_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ con $r_1(t) = (t, 0)$.

$\Rightarrow (f \circ r_1)(t) = t^2 - 4 \ \forall t \in [-1, 1]$

$\Rightarrow (f \circ r_1)'(t) = 2t \ \forall t \in (-1, 1)$.

Busco los puntos críticos de $f \circ r_1$. Es decir, busco $t_1 \in [-1, 1]$ / $(f \circ r_1)'(t_1) = 0 \vee \nexists (f \circ r_1)'(t_1)$

-) $(f \circ r_1)'(t_1) = 0 \Leftrightarrow 2t_1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0$

-) $\nexists (f \circ r_1)'(t_1) \Leftrightarrow t_1 = -1 \vee t_1 = 1$?

$\Rightarrow t_1 \in \{-1, 0, 1\} \Rightarrow r_1(t_1) \in \{(-1,0), (0,0), (1,0)\}$

Estos son los puntos críticos de $f|_{\mathcal{C}_1}$.

?

$\mathcal{C}_2 := Im(r_2)$ donde $r_2 : [\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ con $r_2(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$ ✓

$\Rightarrow (f \circ r_2)(t) = -5\cos(t)\text{sen}(t) + \cos^2(t) + \text{sen}^2(t) - 4$

Como $\cos^2(t) + \text{sen}^2(t) = 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$, $(f \circ r_2)(t) = -5\cos(t)\text{sen}(t) - 4$

$\forall t \in [\pi, 2\pi]$

$\Rightarrow (f \circ r_2)'(t) = -5[\cos^2(t) - \text{sen}^2(t)] \ \forall t \in (\pi, 2\pi)$

Busco los puntos críticos de $f \circ r_2$. Es decir, busco los $t_2 \in [\pi, 2\pi] / (f \circ r_2)'(t_2) = 0 \ \vee \ \nexists (f \circ r_2)'(t_2)$

i) $\nexists (f \circ r_2)'(t_2) \Leftrightarrow t_2 = \pi \ \vee \ t_2 = 2\pi$

ii) $(f \circ r_2)'(t_2) = 0 \Leftrightarrow -5[\cos^2(t_2) - \text{sen}^2(t_2)] = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2(t_2) = \text{sen}^2(t_2) \Leftrightarrow |\cos(t_2)| = |\text{sen}(t_2)|$

$\Leftrightarrow t_2 = \frac{5\pi}{4} \ \vee \ t_2 = \frac{7\pi}{4}$ pues $\pi \leq t_2 \leq 2\pi$.

$\Rightarrow t_2 \in \{\pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\} \Rightarrow r_2(t_2) \in \{(-1,0), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}),$

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (1,0)\}$. Estos son los puntos críticos de $f|_{\mathcal{C}_2}$.

Ahora evalúo a f en los puntos de interés y los comparo para hallar los extremos absolutos de f en D.

Punto crítico	$(-1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
f(punto crítico)	-3	-4	-3	-5.5	-0.5
				MÍN	MÁX

✓

Nicolas Kiszkurno

HOJA N° 4

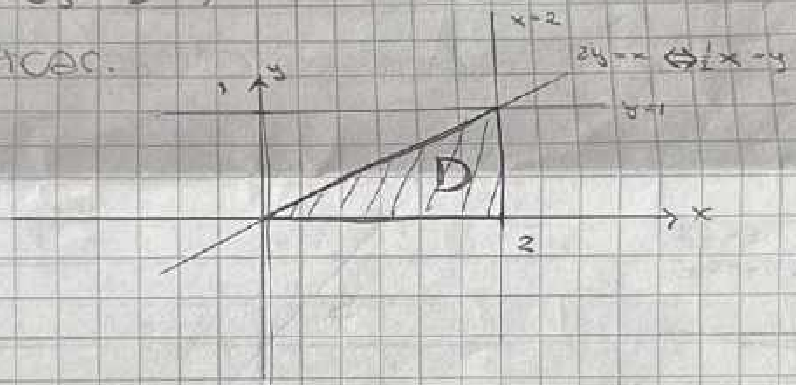
FECHA 25/11/23

2)

$\therefore$ El máximo absoluto de f en D es $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y el mínimo absoluto de f en D es $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. ■

3) a) Calcule la integral $\displaystyle\int_0^1\int_{2y}^2 8e^{2x^2+1}\,dx\,dy$

Como no puedo encontrar una primitiva, voy a cambiar el orden de integración. El dominio de integración es $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\leq y\leq 1 \wedge 2y\leq x\leq 2\}$. Lo voy a graficar.



Voy a expresar a D como un dominio de tipo I.

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\leq x\leq 2 \wedge 0\leq y\leq \frac{1}{2}x\}$

Ahora voy con la integral.

$$\int_0^1\int_{2y}^2 8e^{2x^2+1}\,dx\,dy = \iint_D 8e^{2x^2+1}\,dA(x,y) = \int_0^2\int_0^{x/2} 8e^{2x^2+1}\,dy\,dx$$

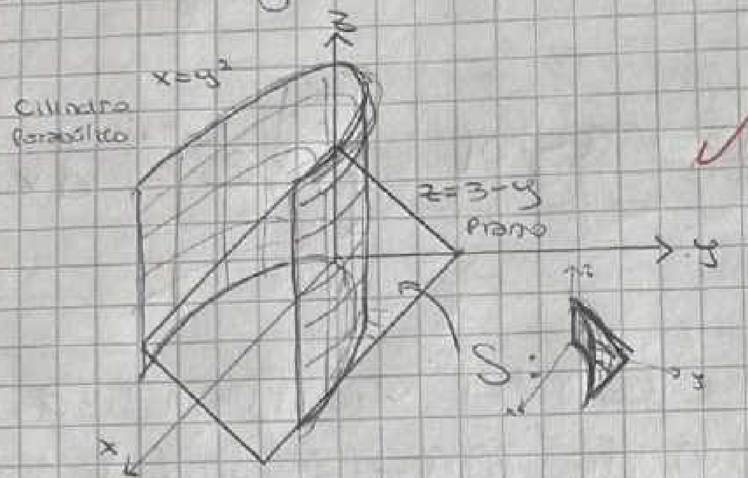
$$=\int_0^2 8e^{2x^2+1}\int_0^{x/2} dy\,dx = \int_0^2 8e^{2x^2+1}\left(y\Big|_{y=0}^{y=\frac{1}{2}x}\right)dx = \int_0^2 8e^{2x^2+1}\left(\tfrac{1}{2}x-0\right)dx$$

$$=\int_0^2 4xe^{2x^2+1}\,dx = e^{2x^2+1}\Big|_{x=0}^{x=2} = \boxed{e^9-e}$$ ■

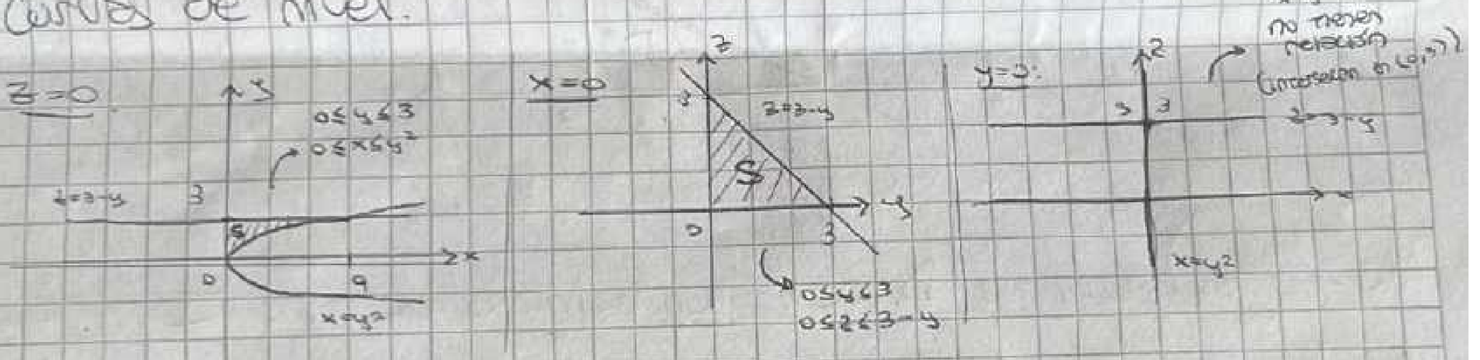
NOTA

3) b) Hallar el volumen del sólido encerrado por el plano $z = 3 - y$ y la superficie $x = y^2$ en el primer octante.

Voy a realizar un gráfico aproximado.



Llamo S al sólido en cuestión. Voy a buscar una expresión para S en coordenadas cartesianas. Veo algunas curvas de nivel.



De aquí, puedo sacar la conclusión de que

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 0 \le y \le 3 \wedge 0 \le x \le y^2 \wedge 0 \le z \le 3-y\}.$$

El volumen de S está dado por $\iiint_S 1 = V$

$$\Rightarrow V = \int_0^3 \int_0^{y^2} \int_0^{3-y} 1 \, dz\, dx\, dy = \int_0^3 \int_0^{y^2} dx \int_0^{3-y} dz\, dy = \int_0^3 \left(x \Big|_{x=0}^{x=y^2}\right)\left(z \Big|_{z=0}^{z=3-y}\right) dy$$

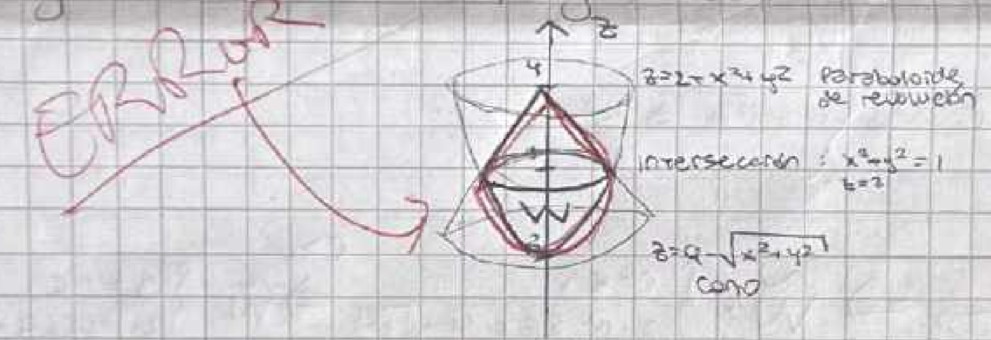
$$= \int_0^3 (y^2 - 0)(3 - y - 0)\, dy = \int_0^3 (3y^2 - y^3)\, dy = \left(y^3 - \frac{1}{4}y^4\right)\Big|_{y=0}^{y=3} = \boxed{\frac{27}{4}}$$

$\therefore$ El volumen del sólido es $\frac{27}{4}$ unidades cúbicas ■

4) Sea $W \subseteq \mathbb{R}^3$ el sólido comprendido por las superficies $z-2 = x^2+y^2$ y $z = 4-\sqrt{x^2+y^2}$.

Calcular $\iiint_W \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dV(x,y,z)$

La superficie $z-2=x^2+y^2 \Leftrightarrow z = 2+x^2+y^2$ es un paraboloide de revolución centrado en el eje z con origen en $(0,0,2)$.
La superficie $z = 4-\sqrt{x^2-y^2}$ es un cono centrado en el eje z con origen en $(0,0,4)$.
La dirección del paraboloide de revolución es "hacia los $z \geq 2$" y la dirección del cono es "hacia los $z \leq 4$".
Voy a realizar un gráfico aproximado.



Voy a expresar a W como una región de tipo I. Para ello, calculo la intersección de las superficies.

$z-2=x^2+y^2 \wedge z=4-\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z = 4-\sqrt{z-2}$

$\Rightarrow z-2=(4-z)^2 \Leftrightarrow z^2-9z+18=0 \Leftrightarrow (z-3)(z-6)=0$

$\Leftrightarrow z=3 \vee z=6$.

Considero $2 \leq z \leq 4$, por lo que descarto $z=6$.

$z=3 \Rightarrow x^2+y^2=1$.

El "Techo" de W es el cono y el "Piso" de W es el paraboloide de revolución. Todo esto con respecto a la variable z. Luego, la "sombra" de W está dada por los $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \le 1$. Así,

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2 \le 1 \wedge 2+x^2+y^2 \le z \le 4-\sqrt{x^2+y^2}\}$$

Para facilitar el cómputo de la integral, voy a realizar un cambio de variables, voy a pasar de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas. Para ello, uso la transformación T.

$$(r,\theta,z) \xrightarrow{T} (x,y,z)$$

$$T(r,\theta,z) = (x(r,\theta,z), y(r,\theta,z), z(r,\theta,z)) = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta), z)$$

donde $r \ge 0$, $0 \le \theta \le 2\pi$ y $z \in \mathbb{R}$. Notar que

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\theta \Rightarrow x^2+y^2 = r^2.$$

$$W: \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ 2+x^2+y^2 \le z \le 4-\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \tilde{W}: \begin{cases} r^2 \le 1 \\ 2+r^2 \le z \le 4-\sqrt{r^2} \end{cases} \overset{r\ge 0}{\Rightarrow} \tilde{W}: \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 2+r^2 \le z \le 4-r \end{cases}$$

Como no hay restricciones para θ se mantiene su cota.

$$\tilde{W} := \{(r,\theta,z) \in \mathrm{Dom}(T) \,/\, 0 \le r \le 1 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge 2+r^2 \le z \le 4-r\}$$

Luego, $T(\tilde{W}) = W$. Entonces, como T es de clase C^1 en $\tilde{W}$ (por tratarse de productos entre polinomios y funciones trigonométricas, y polinomios) y $T|_{\tilde{W}}$ es biyectiva con su imagen, vale el Teorema de Cambio de Variables para Integrales para $f(x,y,z) := \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2}}$, que es continua en W, pues $(0,0,0) \notin W$.

NOTA

Nicolás Kistkurno

HOJA Nº 6

FECHA 25/11/23

Entonces, $\iiint_W f = \iiint_{\tilde{W}} (f \circ T) \cdot J_T$ donde J_T es el determinante jacobiano de T. Lo calculo.

$J_T(r,\theta,z) = \left| \det D_T(r,\theta,z) \right| = \left| \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \overset{F_3}{=}$

$\overset{F_3}{=} \left| \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \right| = \left| r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta \right| = |r| \overset{r\geq 0}{=} r.$

Ahora calculo $(f \circ T)(r,\theta,z) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)$

$= \dfrac{3}{\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta}} = \dfrac{3}{\sqrt{r^2}} = \dfrac{3}{|r|} \overset{r\geq 0}{=} \dfrac{3}{r}$

Luego, $\iiint_{\tilde{W}} (f \circ T) \cdot J_T = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{2+r^2}^{4-r} \frac{3}{r} \cdot r \, dz \, d\theta \, dr = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \int_{2+r^2}^{4-r} dz \, dr$

$= 3\left(\theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right) \int_0^1 \left(z \Big|_{z=2+r^2}^{z=4-r} \right) dr = 3(2\pi - 0) \int_0^1 (4 - r - 2 - r^2) \, dr$

$= 6\pi \int_0^1 (-r^2 - r + 2) \, dr = 6\pi \left(-\frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{2}r^2 + 2r \right) \Big|_{r=0}^{r=1} = \boxed{7\pi}$

$\therefore \iiint_W \dfrac{3}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dV(x,y,z) = 7\pi$ ∎