SEGUNDO PARCIAL DE ÁLGEBRA I

TEMA 1

8 de Julio de 2013

LU $N°$	Apellido y Nombre	Turno
[redacted]	[redacted] [redacted]	[illegible]

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Nota
B-	B	B	B	A

1. Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a^{103} + 11 : 28) = 2$ y $(a^{212} - 16 : 21) = 7$. Calcular el resto de dividir a a por 84.

2. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que:
$$iz^8\overline{z}^3 + 32|z|^6 = 0.$$

3. Sea w una raíz sexta primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que:
$$\sum_{k=0}^{11n} \left(w^{-12} + w^{34} + \overline{w^5} + w^5 + \left(\frac{1}{w}\right)^{10} + \overline{w^{-9}} + w \right)^k = 0.$$

4. Factorizar el polinomio $f = X^6 - 4X^5 + 11X^4 - 20X^3 + 28X^2 - 24X + 12$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que sus raíces dobles son las mismas que las raíces dobles de $g = X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 8X + 4$.

Justifique todas las respuestas.

71.

-V

turno mañana [redacted]

2

$\boxed{1}$ Sea $a \in \mathbb{Z} / (a^{203}+11 ; 28) = 2$ y $(a^{212}-16 ; 21) = 7$

Calcular $r_{84}(a)$

$* \Rightarrow 28 = 2.2.7 \Rightarrow 7 \nmid a^{203}+11$ ✓

$2^2 \nmid a^{203}+11$ ✓

$2 \mid a^{203}+11$ ✓

$\Rightarrow a^{203}+11 \equiv 0\ (2)$

$a^{203} \equiv 1\ (2) \Rightarrow a$ es impar ✓

$* \; 21 = 3.7 \Rightarrow 3 \nmid a^{212}-16$ ✓

$7 \mid a^{212}-16$ ✓

$\Rightarrow a^{212} \equiv 16\ (7)$

$a^{212} \equiv 2\ (7)$ si $(a:7)=7 \Rightarrow 2 \equiv 0\ (7)$ abs! ✓

$\underbrace{(a^6)^{35}}_{\equiv 1} a^2 \equiv 2\ (7)$ $(a:7)=1 \Rightarrow a^6 \equiv 1\ (7)$ ✓ Fermat

$a^2 \equiv 2\ (7) \Rightarrow a \equiv 2\ (7)$ ó $a \equiv 3\ (7)$

↓

$a \equiv 2(7) \rightarrow a^2 \equiv 4(7)$

No sirve.

Sigue atrás

Ahora analizo contradicciones

$a^{203}+11 \equiv 0\ (7)$ $\qquad (7;a)=1 \Rightarrow a^6 \equiv 1\ (7)$

$(a^6)^{33} \cdot a \equiv 3\ (7)$

$a \equiv 3(7) \Rightarrow a$ no puede de ser congruente a 3 mod 7 ✓

~~a par~~ $a^{203}+21 \equiv 0\ (4)$

$a^{203} \equiv 1(4)$ $\qquad (a;4)=1$ pues a es impar $(\varphi(4)=2)$

$(a^4)^{25}\, a^3 \equiv 1\ (4) \Rightarrow \underline{a^2 \equiv 1\ (4)}$ ✓

$a^3 \equiv 1\ (4) \Rightarrow$ la otra posibilidad de a impar y que no se cumpla esto es $(a^3 \equiv 3(4))$

a impar $\Rightarrow a \equiv 1(4)$ ó $a \equiv 3(4)$

$a^{212} \equiv 16\ (3)$

$(a^2)^{106} \equiv 1\ (3)$ $\qquad$ si $(a;3)=3 \Rightarrow 1 \equiv 0\ (3)$ abs! $\Rightarrow (a;3)=1$

$1 \overset{?}{\equiv} 1\ (3)$ $\qquad a^2 \equiv 1\ (3) \Rightarrow$

• si $(a:3)=1 \Rightarrow$ 3 siempre divide a $a^{212}-16$, como que no

que no pase, $\Rightarrow (a;3)=3$ ∴ $a \equiv 0\ (3)$ ✓

En conclusión

$a \equiv 0\ (3)$ ✓

$a^3 \equiv 3\ (4) \Rightarrow \underbrace{a^2}_{=1} \cdot a \equiv 3\ (4) \Rightarrow a \equiv 3\ (4)$ ✓ $\qquad (\varphi(4)=2)$

$a \equiv 2\ (7)$ no $\qquad a \equiv 4(7)$

~~$a \equiv 1\ (2)$~~ $\qquad (a^3 \equiv 3\ (4)$ ya me dice que es impar)

$\Rightarrow a = 7q+2 \equiv 0\ (3)$

$q \equiv 1\ (3) \Rightarrow q = 3q'+1 \Rightarrow a = 7(3q'+1)+1$

$a = 21q'+8$

$\Rightarrow 21q'+8 \equiv 3(4)$

$q' \equiv 3(4) \Rightarrow q' = 4q''+3 \Rightarrow a = 21(4q''+3)+8$

$a = 84q''+71$

$\Rightarrow a \equiv 71\ (84)$ $\qquad \boxed{\therefore\ r_{84}(a) = 71}$

arrastra error

Turno mañana [redacted]

[redacted]

3 2/4

$\boxed{2}$ Hallar todos los $z \in \mathbb{C} \,/\, i z^8 \bar{z}^3 + 32|z|^6 = 0$

$$i z^8 \bar{z}^3 + 32|z|^6 = 0$$

$$i z^8 \bar{z}^3 = -32|z|^6$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} |z|^8 e^{i\alpha 8} \cancel{|z|^3} e^{-i\alpha 3} = e^{i\pi} \cdot 32 \cancel{|z|^6} \Rightarrow z = 0 \text{ es solución}$$

$$=$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z|^5 = 32 \Rightarrow z = \sqrt[5]{32} = 2 \\ \frac{\pi}{2} + \alpha 8 - \alpha 3 + 2k\pi = \pi \end{cases}$$

$$5\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\alpha = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} < 2\pi$$

$$-\frac{1}{10} \leq \frac{2k}{5} < \frac{19}{10}$$

$$-\frac{1}{2} \leq 2k < \frac{19}{2}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{4}}_{-0{,}25} \leq k < \underbrace{\frac{19}{4}}_{= 4{,}75}$$

$$\Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$\Rightarrow$ z es de la forma

$$z = |z| \, e^{i\alpha}$$

$$z = 2 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\right)} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} z_0 &= 2\, e^{\frac{\pi}{10} i} \\ z_1 &= 2\, e^{i\frac{\pi}{2}} \\ z_2 &= 2 \cdot e^{i\frac{9\pi}{10}} \\ z_3 &= 2\, e^{i\frac{13\pi}{10}} \\ z_4 &= 2 \cdot e^{i\frac{17\pi}{10}} \\ z_5 &= 0 \end{aligned}}$$

estos son todos los z posibles

turno mañana. [redacted]

[redacted]

[4] [redacted]

Busco el $(f:g)$ usando el algoritmo de euclides.

$$\begin{array}{l|l} x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 20x^3 + 28x^2 - 24x + 12 & x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 \\ \hline 0 + 0 + 3x^4 - 12x^3 + 24x^2 - 24x + 12 & x^2 + 3 \\ \quad\quad 0 + 0 + 0 + 0 + 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow g \mid f \Rightarrow f = (x^2+3)(x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4)$

$$\frac{0 \pm \sqrt{-4.3.1}}{2.1} = \frac{\pm 2\sqrt{3}\,i}{2} = \boxed{\pm\sqrt{3}\,i}$$

Uso gauss para factorizar g. Candidatos a raiz son $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

$g(1) = 1$, $g(-1) = 1 + 4 + 8 + 8 + 4 \neq 0$

$g(2) = 16 - 4.8 + 8.4 - 8.2 + 4 = 4$

$g(4) = 4^4 - 4.4^3 + 8.4^2 - 8.4 + 4 = 100$

no me sirve ninguno de los candidatos $(g(-2) \neq 0,\ g(-4) \neq 0)$

Se que g tiene raices dobles

$g' = 4x^3 - 12x^2 + 16x - 8$

$gr(g')$ es impar, tiene al menos una raiz racional

gauss una vez mas (se ve a simple vista que no me sirve ninguno ~~[illegible]~~ co $\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow \pm 1, \pm 2$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $g'(1) = 4 - 12 + 16 - 8 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & -12 & +16 & -8 \\ 1 & \downarrow & 4 & -8 & 8 \\ \hline & 4 & -8 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow g' = (x-1)(4x^2 - 8x + 8)$

$g' = (x-1)\,4\,(x^2 - 2x + 2)$

sigo atras.

como se que tiene raices dobles, y 1 no es raiz de g

$\Rightarrow$ me fijo si $(x^2 - 2x + 2) = (g : g')$ (podría haber buscado esto directamente pero me di cuenta ahora)

$\Rightarrow$ $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 \;\; \big| \; x^2 - 2x + 2$

$\quad 0 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 4 \qquad x^2 - 2x + 2$

$\qquad 0 + 2x^2 - 4x + 4$

$\qquad\quad 0 \quad 0 \quad 0$

$\Rightarrow g = (x^2 - 2x + 2)^2$

$\Rightarrow f = (x^2+3)(x^2-2x+2)^2 \longrightarrow \dfrac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \dfrac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$

$\boxed{\text{Factorización en } \mathbb{C}[x] \quad \Rightarrow f = (x+\sqrt{3}i)(x-\sqrt{3}i)(x-1+i)(x-1+i)(x-1-i)(x-1-i)}$

$\boxed{\text{Factorización en } \mathbb{R}[x] \quad f = (x^2+3)(x^2-2x+2)(x^2-2x+2)}$

$\boxed{\text{Factorización en } \mathbb{Q}[x] \quad f = (x^2+3)(x^2-2x+2)(x^2-2x+2)}$

turno mañana [redacted]

[redacted] [redacted]

5

$\boxed{3}$ ~~[illegible]~~ $w \in G_6$

$$\sum_{k=0}^{11n} \left(w^{-12} + w^{34} + \overline{w^5} + w^5 + \left(\frac{1}{w}\right)^{20} + \overline{w^{-9}} + w\right)^k = 0$$

$\Rightarrow w^{-12} = w^6 = 1$ | $\overline{w^5} = \overline{w}^5 = w^{-5} = w$ | $\left(\frac{1}{w}\right)^{20} = (w^{-1})^{20} = w^{-20} = w^2$

$w^{34} = w^4$ | $w^5 = w^5$ | $\overline{w^{-9}} = w^9 = 3$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{11n} \left(\underbrace{\cancel{1} + w^2 + w^3 + w^5 + w^5 + w^6}_{=0} + w\right)^k = 0$$

$$= \sum_{k=0}^{11n} w^k = 0$$ siendo ~~teles corres~~ geométrica

$$\frac{w^{11n+1} - 1}{w - 1} = 0 \iff w^{11n+1} - 1 = 0$$

$\Rightarrow 11n + 1 \equiv 0 \ (6)$

$5n \equiv 5 \ (6)$

$\boxed{n \equiv 1 \ (6)}$ solución