Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Examen Final - 23/04/2021

Justifique todas sus respuestas.

Entregue todas las hojas escaneadas y en orden.

1. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + 8y^3}$.

(a) Estudiar la existencia de las derivadas parciales de f en $(0,0)$.

(b) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

2. Calcular la integral

$$\int_0^1 \int_{x^3}^1 x^2 \cos(y^2)\, dy\, dx$$

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = (x + e^y, 2x - y^2).$$

Sea $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $h = g \circ f$. Se sabe que el polinomio de Taylor de orden 2 de h en $(0,0)$ es $T_2(x,y) = 3x + y - x^2 + 2xy + y^2$.

(a) Calcular $g(1,0)$ y $\nabla g(1,0)$.

(b) Calcular, si existe, el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{h(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

4. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(1,2) = 0$ y $f_x(1,2) = 3$.

Sea $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $g(1,2) = 4$ y sea $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $u(x,y) = f(x,y)g(x,y)$. Probar que existe la derivada parcial $u_x(1,2)$ y calcularla.