HOJA

1

EJERCICIO 1

$f:\{1,2,3,\dots,11\} \to \{1,2,3,\dots,24\}$ /
- f inyectiva
- $f(3)+f(4)=13$
- $10 \leq f(2) \leq 20$

Observo posibles valores para $f(4)$ y $f(3)$ / $f(4)+f(3)=13$

$f(3)$	$f(4)$
1	12
2	11
3	10
4	9
5	8
6	7

ya que vale al revés también

$6 \times 2 = 12$ combinaciones posibles para $f(3)$ y $f(4)$

Veo que en 6 de los 12 casos $f(3)$ o $f(4)$ van a pasar a un valor entre 10 y 20, entonces se para en 2 casos

- Caso 1: $f(3)$ y $f(4) \notin \{10,11,\dots,20\}$

$\Rightarrow$ para $f(2)$ tengo 11 valores posibles a los que puede ir y hay $6 \cdot 11 \cdot \frac{21!}{13!}$ funciones posibles

(*) Los valores que quedan sería $f:\{1,5,6,7,8,9,10,11\} \to \underbrace{\{\dots\}}_{21 \text{ valores}}$

↳ Combinaciones para los valores q' quedan (*)

↳ Valores posibles para $f(2)$

↳ Combinaciones para $f(3)$ y $f(4) \notin \{10..20\}$

• Caso 2 : $f(3)$ o $f(4) \in \{10, 11, \dots, 20\}$

$\Rightarrow$ Para $f(2)$ Tengo 10 valores posibles ya que uno está tomado por $f(3)$ o $f(4)$, entonces hay $6 \cdot 10 \cdot \frac{21!}{13!}$ funciones posibles.

$\Rightarrow$ Las funciones posibles serán Caso 1 + Caso 2

$\Rightarrow$ Habrá $6 \cdot 11 \cdot \frac{21!}{13!} + 6 \cdot 10 \cdot \frac{21!}{13!}$ funciones posibles

$$\boxed{6 \cdot \frac{21!}{13!} \cdot 21}$$

EJERCICIO 2

$p^4 \mid 77^{p^2} + 91^{p-1} + 21!\,p \Rightarrow p \cdot p \cdot p \cdot p \mid 77^{p^2} + 91^{p-1} + 21!\,p$

$\Rightarrow p \mid 77^{p^2} + 91^{p-1} + 21!\,p$

Como $p \mid 21!\,p \;\forall p$ busco $p \mid 77^{p^2} + 91^{p-1}$

$\Rightarrow 77 = 7 \times 11$ y $91 = 7 \times 13$, entonces veo congruencia módulo 7, 11 o 13 ya que con esos primos no puedo aplicar Fermat.

• $77^{p^2} + 91^{p-1} \equiv 91^{p-1} \; (11) \equiv 1 \; (11)$ por PTF

• $77^{p^2} + 91^{p-1} \equiv 0 \; (7)$ ya que $7 \mid 77$ y $7 \mid 91$

• $77^{p^2} + 91^{p-1} \equiv (77^p)^p \; (13) \underset{\text{por PTF}}{\equiv} 77^p \; (13) \underset{\text{por PTF}}{\equiv} 77 \; (13) \equiv 12 \; (13)$

$\Rightarrow 7 \mid 77^{p^2} + 91^{p-1} + 21!\,p$ pero 11 y 13 no.

Scanned with CamScanner

HOJA 2

Me falta ver qué pasa para $p \neq 7, 11$ o 13

$$77^{p^2} + 91^{p-1} \equiv 77^{p} + 1 \ (p) \equiv 78 \ (p)$$

por PTF

$\Rightarrow p \mid 78$ y $78 = 2 . 3 . 13$ y p puede ser $2, 3$ o 13, como ya vi antes que $p = 13 \nmid 77^{p^2} + 91^{p-1} + 21! \, p$ lo descarto.

$\Rightarrow p = 2, 3$ o 7. Me queda ver ahora para que $p /$ $p \mid 77^{p^2} + 91^{p-1} + 21! \, p$ $\quad p^4 \mid 77^{p^2} + 91^{p-1} + 21! \, p$

- $p = 2 \quad p^4 = 16$

$$77^{2^2} + 91^{2-1} + 21! . 2 \equiv 1 + 11 + 0 \ (16) \equiv 12 \ (16) \neq 0$$

- $p = 3 \quad p^4 = 81$

$$77^{3^2} + 91^{3-1} + 21! . 3 \equiv 53 + 19 + 0 \equiv 72 \ (81) \neq 0$$

- $p = 7 \quad p^4 = 2401$

$$77^{7^2} + 91^{7-1} + 21! . 7 \equiv 0 + 0 + 0 \ (2401) \equiv 0 \ (2401)$$

$\Rightarrow$ Solo $p = 7$ permite $p^4 \mid 77^{p^2} + 91^{p-1} + 21! \, p$

EJERCICIO 3

$(4n^2-1 : 14) = 7$ $\qquad$ $n^n \equiv 3 (7)$

↓

¿Qué n cumple?

Como $n^{6k} \equiv 1 (7)$ por PTF observo a qué es congruente n tomando congruencia modulo 6 en el exponente y 7 en la base

n	0	1	2	3	4	5	6
0	/	1	1	1	1	1	1
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	1	4	2	2	4	1
3	0	1	6	6	1	6	6
4	0	1	2	4	4	2	1
5	0	1	4	5	2	3	6

} Congruencia base módulo 7

} Congruencia n^n módulo 7

congruencia exponente módulo 6

Observo que si $n \equiv 1 (6)$ y $n \equiv 3 (7)$ $\Rightarrow n^n \equiv 3 (7)$

Busco más condiciones para n, como $(4n^2-1 : 14) = 7$ y $14 = 7.2$ $\quad 7 \mid 4n^2-1$ y $2 \nmid 4n^2-1$

$4n^2-1 \equiv 0 (7) \Leftrightarrow 4n^2 \equiv 1 (7)$ hago tabla de restos para n congruente a 7

n	0	1	2	3	4	5	6
$4n^2$	0	4	2	1	1	2	4

↑ ↑

$\Rightarrow n \equiv 3 (7)$ o $n \equiv 4 (7)$ sirven, pero ya había visto que $n \equiv 3 (7)$, entonces descarto $n \equiv 4 (7)$

HOJA 3

Como $4n^2$ es par $\forall n \in \mathbb{N}$ $4n^2-1$ es impar $\forall n$ $\Rightarrow 2 \nmid 4n^2-1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces la congruencia con 2 no me da ninguna restricción nueva para n.

En conclusión, tengo que resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} n \equiv 1(6) \\ n \equiv 3(7) \end{cases}$$

Como $6 \perp 7$ por TCR sé que tengo una única solución para n modulo $6.7=42$

$n = 7q+3 \equiv 1(6) \iff q \equiv 4(6)$

$\Rightarrow q = 6k+4$

$\Rightarrow n = 7.(6k+4)+3$

$n = 42k+31$

$\Rightarrow$ Para que $(4n^2-1:14)=7$, $n \equiv 3(7)$ $n \equiv 31(42)$

Scanned with CamScanner