Álgebra 1 - Segundo Parcial - Tema C

7 de Julio de 2023

Turno: MAÑANA (PRACT 2)

Apellidos: Número de Libreta

Nombres: ó DNI: Carrera: LIC. CS. COMPUTACIÓN

1	2	3	4	Nota
B	B	B/B	B	10 (diez)

Usar hojas distintas para ejercicios distintos. Exhibir todos los cálculos. Justificar todas las respuestas. Escribir con tinta y con letra clara y legible.

No se aceptan preguntas: la interpretación de los enunciados es parte del examen.

Ejercicio 1. Hallar todos los pares $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{Z}^2$ que cumplen simultáneamente

$$455\ \mathbf{a} + 595\ \mathbf{b} = 35 \text{ y } (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^{2022} \equiv 510 \pmod{11}.$$

Ejercicio 2. Sea $w = e^{\frac{2}{83}\pi i}$. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$w^{7n+164} = \sum_{k=40}^{890} w^k$$

Ejercicio 3. a) Hallar todos los posibles $\mathbf{c} \in \mathbb{R},\ \mathbf{c} > 0$ tales que el polinomio

$$f = X^6 - 4X^5 - 6X^4 + 16X^3 + 20X^2 + 48X + \mathbf{c}$$

tenga una raíz de argumento $\dfrac{3\pi}{2}$.

b) Para cada valor de $\mathbf{c}$ hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que tiene al menos una raíz doble.

Ejercicio 4. Determinar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$(n^{177} + 3n + 42 : 207) = 69.$$

Expresar las soluciones mediante una única ecuación.

1) Hallar todos los pares $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ que cumplen simultáneamente:

(a) $455a + 595b = 35$

(b) $(a+2b)^{2022} \equiv 510\ (11)$

(a) Resuelvo la ecuación diofántica:

· Coprimizo, dividiendo todo por 35

$\Rightarrow 13a + 17b = 1$ ✓

· Busco una solución particular:

Noto que $a = 4$ y $b = -3$ cumple ✓

· Busco la solución del sistema homogéneo asociado:

$13a + 17b = 0$

Claramente las soluciones serán de la forma:

$a = 17k$ y $b = -13k$ con $k \in \mathbb{Z}$

· Luego sumo las soluciones del sistema homogéneo asociado con la particular

$\Rightarrow a = 17k + 4$ y $b = -13k - 3$ con $k \in \mathbb{Z}$

✓

(2) Reemplazo a y b por los valores encontrados en (a) y busco los K que cumplan (2)

$$\left[17K+4+2\cdot(-13K-3)\right]^{2022} \equiv 5^{10}\ (11)$$

$$\Leftrightarrow \left(-9K-2\right)^{2022} \equiv 4\ (11)$$

Noto que si $11 \mid -9K-2 \Rightarrow$ no sería congruente a 4 mod 11. Por lo que $11 \nmid -9K-2$.

Esto da lugar a poder utilizar el PTF que dice en este caso particular que $(-9K-2)^{10} \equiv 1\ (11)$

$$\Rightarrow \left[(-9K-2)^{10}\right]^{202} \cdot (-9K-2)^{2} \equiv 4\ (11)$$

$$\Leftrightarrow 1\cdot(-9K-2)^2 \equiv 4\ (11)$$

$$\Leftrightarrow (-9K)^2+2\cdot(-9K)\cdot(-2)+(-2)^2 \equiv 4\ (11)$$

$$\Leftrightarrow 81K^2+36K+4 \equiv 4\ (11)$$

$$\Leftrightarrow 4K^2+3K \equiv 0\ (11)$$

$$\Leftrightarrow K\cdot(4K+3) \equiv 0\ (11)$$

Pero 11 es primo, por lo que

$K \cdot (4K+3) \equiv 0\ (11) \Leftrightarrow K \equiv 0\ (11)$ o $4K+3 \equiv 0\ (11)$ ✓

- $K \equiv 0\ (11)$ ✓

- $4K+3 \equiv 0\ (11)$

$\Leftrightarrow 4K \equiv 8\ (11)$ multiplico a ambos lados por 3

$\Leftrightarrow 12K \equiv 24\ (11)$

$\Leftrightarrow K \equiv 2\ (11)$ ✓

Por lo que, tengo 2 posibles valores para K

o bien $K \equiv 0\ (11)$ o bien $K \equiv 2\ (11)$

- Reemplazo en los valores de a y b encontrados antes

- $K \equiv 0\ (11) \to K = 11q$

$a = 17 \cdot (11q) + 4$

$a = 187q + 4$

$b = -13 \cdot (11q) - 3$

$b = -143q - 3$

Bien

Luego:

• $K \equiv 2\ (11) \Rightarrow K = 11q + 2$

$\Rightarrow a = 17 \cdot (11q + 2) + 4$ $\qquad b = -13 \cdot (11q + 2) - 3$

$a = 187q + 38$ $\qquad b = -143q - 29$

En conclusión, los posibles pares $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ que cumplen son:

G bien: $(187q + 4 \,;\, -143q - 3)$

G bien $(187q + 38 \,;\, -143q - 29)$

con $q \in \mathbb{Z}$

R TA

2) Sea $w = e^{\frac{2}{95}\pi i}$. Hallar todos los $m \in \mathbb{N}$ /

$$w^{7m+164} = \sum_{k=40}^{890} w^k \quad \sum \text{!!}$$

$\uparrow$ analizo esto primero

- $\sum_{k=40}^{890} w^k =$

$$= \sum_{k=0}^{890} w^k - \sum_{k=0}^{39} w^k \overset{\text{geométrica}}{=} \frac{w^{891}-1}{w-1} - \frac{w^{40}-1}{w-1}$$

$$= \frac{w^{891} - w^{40}}{w-1}$$

$$\Rightarrow w^{7m+164} = \frac{w^{891} - w^{40}}{w-1}$$

multiplico por $w-1$ ambos lados

$$\Leftrightarrow w^{7m+165} - w^{7m+164} = w^{891} - w^{40}$$

$$\Leftrightarrow w^{40} \cdot \left(w^{7m+125} - w^{7m+124}\right) = w^{40} \cdot \left(w^{851} - 1\right)$$

divido por w^{40} ambos lados

$$\Leftrightarrow w^{7m+125} - w^{7m+124} = w^{851} - 1$$

NOTA

Escaneado con CamScanner

Debido a que $w = e^{\frac{2}{85}\pi i}$ Por De Moivre, $w^{85} = 1$ *
(porque el arg $= 2\pi$)

$\Rightarrow \quad w^{7m} w^{85} w^{40} - w^{7m} w^{85} w^{39} = (w^{85})^{10} \cdot w - 1$

$\Leftrightarrow \quad w^{7m} \cdot w^{40} - w^{7m} \cdot w^{39} = w - 1$

$\Leftrightarrow \quad w^{7m+39} \cdot (w-1) = w - 1$ divido $w-1$ de ambos lados

$\Leftrightarrow \quad w^{7m+39} = 1$

Por lo dicho en * [no sólo por esto, sino por quién es w]

$7m + 39 \equiv 0 \ (85)$

Corolario de TCR

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7m+39 \equiv 0 \ (17) \\ 7m+39 \equiv 0 \ (5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7m+5 \equiv 0 \ (17) \\ 2m+4 \equiv 0 \ (5) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7m \equiv 12 \ (17) & \text{multiplico por 5 ambos lados} \\ 2m \equiv 1 \ (5) & \text{multiplico por 3 ambos lados} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 35m \equiv 60 \ (17) \\ 6m \equiv 3 \ (5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \equiv 9 \ (17) \\ m \equiv 3 \ (5) \end{cases}$

Escaneado con CamScanner

$$\begin{cases} M \equiv 9\ (17) \ ① \\ M \equiv 3\ (5) \ ② \end{cases}$$ Tiene solución por TCR

Por ① $M = 17K + 9$

Lo reemplazo en ② para hallar los K

$17K + 9 \equiv 3\ (5)$

$\Leftrightarrow\ 2K \equiv 4\ (5)$ multiplico por 3 ambos lados

$\Leftrightarrow\ 6K \equiv 12\ (5)$

$\Leftrightarrow\ K \equiv 2\ (5)$

Reemplazo en ① $M = 17 \cdot (5q + 2) + 9$

$M = 85q + 43$

$\Rightarrow R^{ta}$: Cumplen aquellos

$M \equiv 43\ (85)$ ✓

3) a) Hallar todos los posibles $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Tales que el polinomio:

$$f = x^6 - 4x^5 - 6x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 48x + c$$

Tenga una raíz de argumento: $\frac{3\pi}{2}$

Si existe una raíz de arg: $\frac{3\pi}{2}$, será de la forma:

$$|z| \cdot e^{\frac{3\pi}{2} i} = |z| \cdot (0 + (-1)i) = -|z|i$$

Busco $|z|$ para luego hallar c

~~Evaluo f en dicha raíz:~~

$$\cancel{f(-|z|i) = (-|z|i)^6 - 4(-|z|i) - 6 (|z|i)^4 + 16 (-|z|i)}$$

$\Rightarrow$ $|z|i$ también es raíz por tener los coeficientes en $\mathbb{R}$, evaluo f en $|z|i$:

$$f(|z|i) = (|z|i)^6 - 4(|z|i)^5 - 6((|z|i))^4 + 16(|z|i)^3 + 20 \cdot (|z|i)^2 + 48(|z|i) + c$$

$$= -|z|^6 - 4|z|^5 i - 6|z|^4 - 16|z|^3 i - 20|z|^2 + 48|z|i + c$$

Sé que eso debe ser 0 y que $c \in \mathbb{R}$, entonces la expresión anteriormente $\in \mathbb{R}$ (sin contar c claramente).

~~$\Rightarrow$ Tanto la parte real como imaginaria por separado deben...~~

$\Rightarrow$ La parte imaginaria debe ser 0, ya que $|z| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ por sí sola

$-4|z|^5 - 16|z|^3 + 48|z| = 0$

$-4|z|(|z|^4 + 4|z|^2 - 12) = 0$

$|z|$ no puede ser 0 porque sino, no habría raíz.

$\Rightarrow (|z|^4 + 4|z|^2 - 12) = 0$ y claramente $|z| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Renombro: $|z|^2 = x$

$\Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \iff \dfrac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \begin{cases} x = 2 \\ x = -6 \end{cases}$

Vuelvo a $x = |z|^2$

$\Rightarrow |z|^2 = 2 \ \vee \ |z|^2 = -6$

Tiene soluciones imaginarias, no lo tengo en cuenta

Puede ser

$|z| = \sqrt{2} \ \vee \ |z| = -\sqrt{2}$ < 0, no lo tengo en cuenta

$\Rightarrow |z| = \sqrt{2}$

Pero como dije antes si $|z|i$ es raíz $\iff -|z|i$ es raíz

$\Rightarrow \sqrt{2}\, i$ es raíz y $-\sqrt{2}\, i$ es raíz

~~$|z| = \sqrt{2}$~~ Una vez hallado $|z|$, Hallo "c"

$\Rightarrow (x-\sqrt{2}i)\cdot(x+\sqrt{2}i) \mid b$

$\Leftrightarrow \quad x^2+2 \mid b$

Veo el valor de ~~b~~ c para el cual $x^2+2 \mid b$

$$
\begin{array}{l|l}
x^6-4x^5-6x^4+16x^3+20x^2+48x+c & x^2+2 \\
\cline{2-2}
-\;x^6 \quad +2x^4 & x^4-4x^3-8x^2+24x+36 \\
\hline
0\ -4x^5-8x^4+16x^3+20x^2+48x+c & \\
-\;-4x^5 \quad -8x^3 & \\
\hline
0\ -8x^4+24x^3+20x^2+48x+c & \\
-\;-8x^4 \quad -16x^2 & \\
\hline
0\ \ 24x^3+36x^2+48x+c & \\
-\;24x^3 \quad +48x & \\
\hline
0\ \ 36x^2+c & \\
-\;36x^2+72 & \\
\hline
0\ \ c-72 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow c-72=0 \Leftrightarrow \boxed{c=72}$ R^{ta} de a)

B

b) Para los valor de c hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}(x)$, $\mathbb{R}(x)$, y $\mathbb{C}[x]$, sabiendo que tiene al menos una raíz doble.

• $c = 72$

Por (a) sé que $-\sqrt{2}\,i$ y $\sqrt{2}\,i$ son raíces.

Primero derivo y veo si $-\sqrt{2}\,i$ y $\sqrt{2}\,i$ siguen siendo raíces

$$f' = 6x^5 - 20x^4 - 24x^3 + 48x^2 + 40x + 48$$

$\Rightarrow$ Evalúo y no son. Conviene directamente dividir a f por $(x-\sqrt{2}\,i)\cdot(x+\sqrt{2}\,i)$ pero ya lo hicimos en (a), queda:

$$f = (x^2+2)\cdot\overbrace{(x^4-4x^3-8x^2+24x+36)}^{g \text{ ← lo llamo } g}$$

Acá hay al menos 1 raíz doble, por lo que derivo, a esto que llamaré: g

$$g' = 4x^3 - 12x^2 - 16x + 24 :$$

$$4\cdot(x^3 - 3x^2 - 4x + 6)$$

Uso lema de Gauss a ver si encuentro una raíz. Pruebo con $\{\pm 6, \pm 2, \pm 3, \pm 1\}$

$g'(1) = 0$ ¿Es esa la raíz doble que busco? Lo evalúo en g

$g(1) \neq 0 \Rightarrow \underline{NO}$ es

Como $g(1) \neq 0 \Rightarrow 1$ no es raíz

Pero $(X-1) \mid g'$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & -4 & 6 \\ 1 & & 1 & -2 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\Rightarrow g' = 4\cdot(X-1)\cdot(X^2-2X-6)$$

Debe estar acá esa raíz que es doble, uso la resolvente

$$X_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = \begin{cases} \boxed{X_1 = 1+\sqrt{7}} \\ \boxed{X_2 = 1-\sqrt{7}} \end{cases}$$

Evalúo en g

$$g(1+\sqrt{7}) = 0$$

Bien, pero si $1+\sqrt{7}$ es raíz doble, su conjugado también lo es $\Rightarrow 1+\sqrt{7}$ y $1-\sqrt{7}$ son raíces dobles.

Bien

$$\Rightarrow f = (X^2+2)\cdot(X-(1+\sqrt{7}))^2\cdot(X-(1-\sqrt{7}))^2$$

• Factorización en $\mathbb{C}[X]$

$$f = (X-\sqrt{2}\,i)\cdot(X+\sqrt{2}\,i)\cdot(X-(1+\sqrt{7}))^2\cdot(X-(1-\sqrt{7}))^2 \quad R^{TA}$$

Todos de grado 1, entonces es irreducible. ✓

• Factorización en $\mathbb{R}[X]$

$$f = (X^2+2)\cdot(X-(1+\sqrt{7}))^2\cdot(X-(1-\sqrt{7}))^2 \quad R^{TA}$$ ✓

Tiene discriminante < 0 — Raíz Grado 1

• Factorización en $\mathbb{Q}[X]$:

Primero noto que: $(X-(1+\sqrt{7}))^2\cdot(X-(1-\sqrt{7}))^2 = \left((X-(1+\sqrt{7}))\cdot(X-(1-\sqrt{7}))\right)^2$

$$= (X^2-2X-6)^2$$

$$\Rightarrow f = (X^2+2)\cdot(X^2-2X-6)^2 \quad R^{TA}$$ ✓

No tiene raíces en $\mathbb{Q}(x)$ — No tiene raíces en $\mathbb{Q}(x)$

8/10

4) Determinar todos los $m \in \mathbb{Z}$ /

$$(m^{177} + 3m + 42 : 207) = 69$$

Expresar mediante una única ecuación

Noto que $69 = 23 \cdot 3$

y que $207 = 23 \cdot 3^2$

Por lo que: $23 \mid m^{177} + 3m + 42$, $3 \mid m^{177} + 3m + 42$, pero $9 \nmid m^{177} + 3m + 42$

• analizo mod 23

$$m^{177} + 3m + 42 \equiv 0 \ (23)$$

$$\Leftrightarrow \ m^{177} + 3m + 19 \equiv 0 \ (23)$$

Noto que si $23 \mid m \Rightarrow$ la expresión no es $\equiv 0 \ (23)$, por lo que $23 \nmid m$. Puedo utilizar PTF, $m^{22} \equiv 0 \ (23)$

$$\Rightarrow \ (m^{22})^8 \cdot m + 3m + 19 \equiv 0 \ (23)$$

$$\Leftrightarrow \ 1 \cdot m + 3m + 19 \equiv 0 \ (23)$$

$$\Leftrightarrow \ 4m \equiv -19 \ (23)$$

$\Leftrightarrow \ 4m \equiv 4 \ (23)$; multiplico a ambos lados por 6

$\Leftrightarrow$ $24m \equiv 24 \ (23)$

$\boxed{m \equiv 1 \ (23)}$ ✓

• analizo mod 3

$$m^{177} + 3m + 42 \equiv 0 \ (3)$$

$\Leftrightarrow$ $m^{177} \equiv 0 \ (3)$ Pero 3 es primo por lo que:

$\Leftrightarrow$ $m \equiv 0 \ (3)$ ✓

• analizo mod 9:

Como sé que $m = 3K$ con $K \in \mathbb{Z}$. y $9 = 3 \cdot 3$, entonces mod 9 tendré tres posibles restos, reemplazando la K por $3q + r$ con $r \in \{0, 1, 2\}$.

$r = 0$

$m = 3 \cdot (3q)$

$m = 9q$

• $r = 1$

$m = 3 \cdot (3q + 1)$

$m = 9q + 3$

• $r = 2$

$m = 3 \cdot (3q + 2)$

$m = 9q + 6$

Sé que:

$9 \nmid m^{177} + 3m + 42$.

Me fijo si existen restos que hacen que la congruencia no sea 0 para estar seguro.

- $m \equiv 0\ (9)$

$$m^{177} + 3m + 42 \equiv\ ?\ (9)$$

$$0^{177} + 3\cdot 0 + 6 \equiv 6\ (9) \leftarrow \text{Bien (no es 0)}$$

- $m \equiv 3\ (9)$

$$3^{177} + 3\cdot 3 + 42 \equiv\ ?\ (9)$$

porque $3^2 = 9$

$$0 + 0 + 6 \equiv 6\ (9) \leftarrow \text{no es 0}$$

- $m \equiv 6\ (9)$

$$6^{177} + 18 + 42 \equiv\ ?\ (9)$$

porque $6^2 = 36$

$$0 + 0 + 6 \equiv 6\ (9) \leftarrow \text{no es 0}$$

Bien, todos sirven ⟹ quedan 3 sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} m \equiv 1\ (23) \\ m \equiv 0\ (9) \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} m \equiv 1\ (23) \\ m \equiv 3\ (9) \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} m \equiv 1\ (23) \\ m \equiv 6\ (9) \end{cases}$$

1   2   3

Todo esto es como decir

$$n \equiv 1\ (23)$$
$$n \equiv 0\ (3)$$

!

① Como $9 \perp 23$, por TCR hay solución. Como

$m = 23k + 1$. Lo reemplazo en la 2da ecuación

$23k + 1 \equiv 0 \ (9)$

$\Leftrightarrow \ 5k \equiv 8 \ (9)$ multiplico por 2

$\Leftrightarrow \ 10k \equiv 16 \ (9)$

$\Leftrightarrow \ k \equiv 7 \ (9)$

$\Rightarrow \ m = 23 \cdot (9\not{t} + 7) + 1$

$\Leftrightarrow \ m = 207t + 162$

② Por el mismo argumento que en ①, por TCR vale.

$m = 23k + 1$. Lo reemplazo en 2da ecuación

$23k + 1 \equiv 3 \ (9)$

$\Leftrightarrow \ 5k \equiv 2 \ (9)$ multiplico por 2 a ambos lados

$\Leftrightarrow \ 10k \equiv 4 \ (9)$

$\Leftrightarrow \ k \equiv 4 \ (9)$

$\Rightarrow \ m = 23 \cdot (9\not{t} + 4) + 1$

$\Leftrightarrow \ m = 207\not{t} + 93$

10/10

③ Por el mismo argumento que ①, por TCR, vale que:

$m = 23k + 1$. Lo reemplazo en la 2^{da} ecuación

$23k + 1 \equiv 6 \ (9)$

$\iff$

$5k \equiv 5 \ (9)$ multiplico por 2 a ambos lados)

$\iff$

$10k \equiv 10 \ (9)$

$\iff$ $k \equiv 1 \ (9)$

$\Rightarrow m = 23 \cdot (9j + 1) + 1$

$m = 207j + 24$

Entonces, los 3 sistemas quedaron de la forma:

① $m \equiv 162 \ (207)$ o ② $m \equiv 93 \ (207)$ o ③ $m \equiv 24 \ (207)$

Pero noto que estos 3 sistemas los puedo expresar en uno solo, ya que $207 : 3 = 69$.

y $m \equiv 24 \ (69)$ cumple los 3, y los expreso en uno solo

R^{TA}: $m \equiv 24 \ (69)$ son los m que cumplen