Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4
BM	B	B	B

Aprobada

KLIMKOWSKI VICTORIA Nº Libreta: 1390/21 Lic. ciencias de datos

② Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene $\prod_{j=1}^{n}(n+j) \geq 2.6^{n-1}$

Defino $P(n)$: « $\prod_{j=1}^{n}(n+j) \geq 2.6^{n-1}$ » con $n \in \mathbb{N}$, Qvq $P(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$ y lo pruebo por inducción.

.) Caso base: $P(1)$ es verdadero $\iff \prod_{j=1}^{1}(n+j) \geq 2.6^{1-1}$

$\iff (1+1) \geq 2.6^{1-1}$

$\therefore P(1)$ es verdadero $\iff 2 \geq 2$

.) Paso Inductivo: sea $h \in \mathbb{N}$, supongamos que $P(h)$ es verdadero, es decir que vale que $\underbrace{\prod_{j=1}^{h}(h+j) \geq 2.6^{h-1}}_{HI}$

Qvq $P(h+1)$ es verdadero, o sea que $\prod_{j=1}^{h+1}(h+1+j) \geq 2.6^{h+1-1}$

Sabemos $\prod_{j=1}^{h+1}(h+1+j) = \prod_{K=2}^{h+2}(h+1+K-1) = \prod_{K=2}^{h+2}(h+K)$

con cambio de índice $j = K-1$, $K = j+1$, $1 \leq j \leq h+1$, $2 \leq j+1 \leq h+2$

$\prod_{K=2}^{h+2}(h+K) = \left(\prod_{K=2}^{h}(h+K)\right).(h+(h+1))(h+(h+2)) =$

$\frac{1}{(h+1)}.\left(\prod_{K=1}^{h}(h+K)\right).(2h+1)(2h+2) = 2(2h+1).\left(\prod_{K=1}^{h}(h+K)\right)$ pero

$2(2h+1).\prod_{K=1}^{h}(h+K) \overset{HI}{\geq} 2.6^{h-1}.(2(2h+1))$ ($2(2h+1)) > 0$ pues $2h+1 > 0$), me alcanza probar que

Basta ver que:

$2.6^{h-1}.2(2h+1) \geq 2.6^{h+1-1}$

$\iff 6^{h-1}.(8h+4) \geq 2.6^{h}$

$\iff 6^{h-1}(8h+4) - 6^{h}.2 \geq 0$

$\iff 6^{h-1}((8h+4)-6.2) \geq 0$

$\iff 6^{h-1}((8h+4)-12) \geq 0$

$\iff \underbrace{6^{h-1}}_{>0\ \forall h \in \mathbb{N}}\underbrace{(8h-8)}_{\geq 0\ \forall h \in \mathbb{N}} \geq 0$ pues $8h-8 = 8(h-1)$

$\therefore P(h+1)$ es verdadero

Así $P(1)$ es verdadero y [$h \in \mathbb{N}$, $P(h)$ verdadero $\Rightarrow P(h+1)$ verdadero]

Por el principio de inducción, $P(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$

☒

① $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Definimos en $P(V)$ la relación dada por $A \mathcal{R} B \iff \{1,2,3\} \subseteq (A \cup B)^c$

a) Reflexiva ✗: para que sea ~~reflexiva~~ reflexiva necesito que

$A \mathcal{R} A \iff \{1,2,3\} \subseteq (A \cup A)^c \iff \{1,2,3\} \subseteq A^c$ ✓

No es reflexiva pues si tomo $A = \{1,2,3\}$, $\{1,2,3\} \not\subseteq A^c$, luego $A \not\mathcal{R} A$ ✓

Simétrica ✓: para que sea simétrica necesito que

$A \mathcal{R} B \iff \{1,2,3\} \subseteq (A \cup B)^c$

y que

$B \mathcal{R} A \iff \{1,2,3\} \subseteq (B \cup A)^c$

pero yo sé que $(A \cup B)^c = (B \cup A)^c$ pues $(B \cup A) = (A \cup B)$ ✓ luego si vale una, vale la otra y es simétrica ✓

Antisimétrica ✗: no vale pues si $A = \{4,5\}$ y $B = \{6,7\}$

$A \mathcal{R} B \iff \{1,2,3\} \subseteq (A \cup B)^c$

$A \mathcal{R} B \iff \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,8,9,10\}$ ✓ y a su vez

$B \mathcal{R} A \iff \{1,2,3\} \subseteq (A \cup B)^c$

$B \mathcal{R} A \iff \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,8,9,10\}$ ✓ Y $A \neq B$.

Transitiva ✓: necesito que el primer renglón implique el segundo (o sea que si $A \mathcal{R} B$ y $B \mathcal{R} C$, $A \mathcal{R} C$)

$A \mathcal{R} B \iff \{1,2,3\} \subseteq (A \cup B)^c$

$B \mathcal{R} C \iff \{1,2,3\} \subseteq (B \cup C)^c$

$A \mathcal{R} C \iff \{1,2,3\} \subseteq (A \cup C)^c$

Es transitiva y lo pruebo con una tabla de verdad considerando todos los casos posibles.

La casilla "¿Importa?" es equivalente a decir que $(A \mathcal{R} B) \wedge (B \mathcal{R} C)$ es decir $\{1,2,3\} \subseteq (A \cup B)^c$ y que $\{1,2,3\} \subseteq (B \cup C)^c$ ya que necesito que ambas proposiciones se cumplan para probar la implicancia con $(A \mathcal{R} C)$.

Todos los ~~casillas~~ renglones marcados como "no importan" son los casos irrelevantes para probar la transitividad.

Como todos los casos que sí importan tienen una V en la columna $A \mathcal{R} C$ (es decir, $\{1,2,3\} \subseteq (A \cup C)^c$), es transitiva ✓

$A \mathcal{R} B$ y $B \mathcal{R} C \Rightarrow A \mathcal{R} C$

La próxima subí la tabla al derecho.

A	B	C	$\{1,2,3\}$	$A \cup B$	$(A \cup B)^c$	$\{1,2,3\} \subseteq (A \cup B)^c$	$B \cup C$	$(B \cup C)^c$	$\{1,2,3\} \subseteq (B \cup C)^c$	¿Importa?	$A \cup C$	$(A \cup C)^c$	$\{1,2,3\} \subseteq (A \cup C)^c$
V	V	V	V	V	F	F	V	F	F	NO	V	F	F
V	V	V	F	V	F	V	V	F	V	SI	V	F	V
V	V	F	V	V	F	F	V	F	F	NO	V	F	F
V	V	F	F	V	F	V	V	F	V	SI	V	F	V
V	F	V	V	V	F	F	V	F	F	NO	V	F	F
V	F	V	F	V	F	V	V	F	V	SI	V	F	V
V	F	F	V	V	F	F	F	V	V	NO	V	F	F
V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	SI	V	F	V
F	V	V	V	V	F	F	V	F	F	NO	V	F	F
F	V	V	F	V	F	V	V	F	V	SI	V	F	V
F	V	F	V	V	F	F	V	F	F	NO	F	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V	F	V	SI	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	F	F	NO	V	F	F
F	F	V	F	F	V	V	V	F	V	SI	V	F	V
F	F	F	V	F	V	V	F	V	V	SI	F	V	V
F	F	F	F	F	V	V	F	V	V	SI	F	V	V

b) Calcular cuántos $A \in P(V)$ cumplen simultáneamente

$A \cap \{4,5,6\} \neq \emptyset$ y $A R \{4,5,6\}$

$\{4,5,6\}$ no aparecen en A El enunciado pide todo lo contrario.

Defino $W = \{1,2,3,7,8,9,10\}$ $\#P(W) = 2^7 = 128$

$A \in P(W)$

$A R \{4,5,6\} \iff \{1,2,3\} \subseteq (A \cup \{4,5,6\})^c$

No, necesitás que $\{1,2,3\} \cap (A \cup \{4,5,6\}) = \emptyset$

Para que $\{1,2,3\} \subseteq (A \cup \{4,5,6\})^c$ necesito que $\{1,2,3\} \not\subseteq (A \cup \{4,5,6\})$

Ya sé que $\{1,2,3\}$ nunca está contenido en $\{4,5,6\}$ pero necesito que

interseque

no esté contenido en A tampoco

Luego, redefino W' sin el $\{1,2,3\}$

$W' = \{7,8,9,10\}$ $P(W') = 2^4 = 16$

$A \in P(W')$

Luego, hay 16 conjuntos que cumplen ambas condiciones

Se pide lo contrario a lo hallado, así queda simple el problema.

③ $a \in \mathbb{Z}$ que cumplen que $\frac{2a-1}{5} - \frac{a-1}{2a-3} \in \mathbb{Z}$

$$\frac{(2a-1)(2a-3) - (a-1) \cdot 5}{5(2a-3)}$$

Pido que

$5(2a-3) \mid (2a-1)(2a-3) - (a-1) \cdot 5 \iff 5(2a-3) \mid 4a^2 - 13a + 8$

Yo sé que $5(2a-3) \mid 5(2a-3) \underset{\times 2a}{\Longrightarrow} 5(2a-3) \mid 20a^2 - 30a$ $\quad \times 5 \Downarrow$

$5(2a-3) \mid 20a^2 - 65a + 40$

Luego, si $\left.\begin{array}{l} 5(2a-3) \mid 20a^2 - 30a \\ 5(2a-3) \mid 20a^2 - 65a + 40 \end{array}\right\} 5(2a-3) \mid 20a^2 - 30a - 20a^2 + 65a - 40 \iff 5(2a-3) \mid 35a - 40$

Yo sé que $5(2a-3) \mid 5(2a-3) \underset{\times 7}{\Longrightarrow} 5(2a-3) \mid 70a - 105$

y que $5(2a-3) \mid 35a - 40 \underset{\times 2}{\Longrightarrow} 5(2a-3) \mid 70a - 80$

Luego $5(2a-3) \mid 70a - 105 - 70a + 80 \Rightarrow 5(2a-3) \mid 25$

$Div(25) = \{\pm 1, \pm 5, \pm 25\}$. Los pruebo a mano

$5(2a-3) = -1$, $a = 1,4$, $a \notin \mathbb{Z}$

$5(2a-3) = 1$, $a = 1,6$, $a \notin \mathbb{Z}$

$5(2a-3) = -5$, $a = 1$, $a \in \mathbb{Z}$

$5(2a-3) = 5$, $a = 2$, $a \in \mathbb{Z}$

$5(2a-3) = -25$, $a = -1$, $a \in \mathbb{Z}$

$5(2a-3) = 25$, $a = 4$, $a \in \mathbb{Z}$

Candidatos: $a = 1$, $a = 2$, $a = -1$, $a = 4$

Luego, me fijo $\frac{2(1)-1}{5} - \frac{(1)-1}{2(1)-3} = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$

$$\frac{2(-1)-1}{5} - \frac{(-1)-1}{2(-1)-3} = -\frac{3}{5} - \frac{(-2)}{(-5)} = -1 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{2(2)-1}{5} - \frac{(2)-1}{2(2)-3} = \frac{3}{5} - 1 = -\frac{2}{5} \notin \mathbb{Z}$$

$$\frac{2(4)-1}{5} - \frac{4-1}{4.2-3} = \frac{7}{5} - \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \notin \mathbb{Z}$$

El único $a \in \mathbb{Z}$ es $\boxed{a = -1}$

④ $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos tales que $(a:b) = 5$. Determinar posibles $(2a^3 + 35ab + 25 : 350)$ y proponer un ejemplo para (a, b) que lo cumpla

coprimizando, $a = 5a'$ y $b = 5b'$ con $a' \perp b'$

$$(2 \cdot (5a')^3 + 35 \cdot (5a' \cdot 5b') + 25 : 2 \cdot 5^2 \cdot 7) =$$

$$5^2 \left((2 \cdot 5(a')^3 + 35a'b' + 1) : 2 \cdot 7 \right)$$

$MCD \mid (2 \cdot 5(a')^3 + 35a'b' + 1 : 14)$

Ya sé que 5^2 divide a 350 y a $2a^3 + 35ab + 25$, luego el MCD tendrá la forma $MCD = 5^2 \cdot 2^\alpha \cdot 7^\beta$ con $0 \leq \alpha \leq 1$ y $0 \leq \beta \leq 1$

Averiguo si $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$

$$2 \cdot 5(a')^3 + 35a'b' + 1 \equiv 0 \ (2)$$

$$0 + 35a'b' + 1 \equiv 0 \ (2) \rightarrow \text{solo pasa si } a' \text{ y } b' \text{ son impares}$$

$\alpha = 1$ si a' y b' son impares, si alguno no lo fuera, $\alpha = 0$

Averiguo si $\beta = 0$ o $\beta = 1$

Tabla de restos mod 7

a'	0	1	2	3	4	5	6
$(a')^3$	0	1	1	6	1	6	6
$3(a')^3$	0	3	3	4	3	4	4

$$2 \cdot 5(a')^3 + 35a'b' + 1 \equiv 0 \ (7)$$

$$3(a')^3 + 0 + 1 \equiv 0 \ (7) \rightarrow \text{sólo pasa si } 3(a')^3 \equiv 6 \ (7), \text{ o sea, nunca.}$$

Los MCD posibles para $(2a^3 + 35ab + 25 : 350)$ son 5^2 y $5^2 \cdot 2$

$MCD = 5^2$, Ej $a' = 2$, $b' = 3$, es decir $a = 10$, $b = 15$ $\}$ ~~comprobado~~ $(7275 : 350) = 5^2 = 25$

$MCD = 2 \cdot 5^2$, Ej $a' = 1$, $b' = 3$, es decir $a = 5$, $b = 15$ $\}$ $(2900 : 350) = 50$