[redacted]

Muy Bien!

1	2	3	4	5	Calificación
B	B	B	B	B=	A

[redacted]

APELLIDO Y NOMBRE: [redacted] NO. DE LIBRETA: [redacted]

TURNO: ☐ Mañana ☒ Tarde ☐ Noche CARRERA: [redacted]

Álgebra I

Segundo Cuatrimestre - Segundo parcial - 27/11/2018

---

1. Hallar **todos** los $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que satisfacen simultáneamente:

$$51a + 15b = 9 \qquad \text{y} \qquad 2a \equiv b \pmod{21}.$$

2. Hallar **todos** los primos positivos p tales que $3p \mid 49^{p^2-1} + 8^p + 6^{p^2+1}$.

3. Hallar **todos** los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\frac{(1-i)^{3n+4}}{2^n(1+i)}$$

es imaginario puro.

4. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raíz 35-ava primitiva de la unidad. Hallar **todos** los $n \in \mathbb{N}$ que satisfacen simultáneamente:

$$n \equiv 1 \pmod{2}, \qquad \sum_{j=0}^{3n+1} w^{7j} = 0, \qquad \text{y} \qquad \overline{w}^{15} \in G_{2n+3}.$$

5. Factorizar en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio

$$f = X^6 + 2X^5 - 4X^4 + 13X^2 - 10X + 2$$

sabiendo que $-1 + \sqrt{2}$ es una raíz múltiple.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

[redacted]

HOJA Nº 1/5

FECHA

1) Hallar todos los $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tq

(i) $51a + 15b = 9$ (ii) $2a \equiv b \pmod{21}$

(i) $51a+15b=9 \iff 17a+5b=3$ y como $(17:5)=1 \mid 3 \Rightarrow \exists$ sol

· Busco sol. particular (a_0,b_0): Encuentro a ojo: $(a_0,b_0)=(-1,4)$

· Busco sol del homogeneo: $17a+5b=0$

$$\iff 17a=-5b \Rightarrow \begin{cases}17\mid 5b \overset{(17:5)=1}{\Rightarrow} 17\mid b \Rightarrow b=17k^{\in\mathbb{Z}} \\ 5\mid 17a \Rightarrow 5\mid a \Rightarrow a=5q^{\in\mathbb{Z}}\end{cases}$$

reemplazo $17\cdot 5q = -5\cdot 17k \iff q=-k$

$\therefore S_0 = \{(-5k,17k),\ k\in\mathbb{Z}\}$

~~Soluc~~ Ahora, ya se que $\begin{cases} a-a_0=-5k \\ b-b_0=17k\end{cases} \iff \begin{cases}a=a_0-5k\\ b=b_0+17k\end{cases}$

$\Rightarrow Soluc = \{(-1-5k,\ 4+17k),\ k\in\mathbb{Z}\}$

(ii) ~~Como 21 = 7·3 : 2a ≡ b (21) ⟺ 2a ≡ b (3), 2a ≡ b (7) ⟺ 2a − b ≡ 0 (3), 2a − b ≡ 0 (7)~~

Yo tengo $2a\equiv b\ (21) \iff 2a-b\equiv 0\ (21)$

pero yo ya tengo los valores de a y b, entonces reemplazo

$2(-5k-1)-(4+17k) \equiv -10k-2-4-17k \overset{???}{\equiv} 0\ (21)$

$\cancel{-27k-6 \equiv 15k-6\ (21)} \iff -27k-6 \equiv 15k-6\equiv 0\ (21)$

$\iff 15k\equiv 6\ (21) \overset{/3}{\iff} 5k\equiv 2\ (7) \overset{(3:7)=1}{\iff} 5\cdot 3k \equiv 2\cdot 3\ (7)$

$\iff \boxed{k\equiv 6\ (7)} \iff k=7q^{\in\mathbb{Z}}+6$

Rta: los (a,b) que cumplen ambos condiciones son

$\{(-1-5(7q+6),\ 4+17(7q+6)),\ q\in\mathbb{Z}\}$

$= \{(-35q-31,\ 119q+106),\ q\in\mathbb{Z}\}$ Rta

[redacted]

HOJA Nº 2/5

FECHA

② Hallar todos los primos ≥ 0 p tq $3p \mid 49^{p^2-1}+8^p+6^{p^2+1}$

$\iff \underbrace{49^{p^2-1}+8^p+6^{p^2+1}}_{h} \equiv 0\ (3p) \underset{(3:p)=1}{\iff} \begin{cases} h \equiv 0\ (3) \\ h \equiv 0\ (p) \end{cases}$ $\qquad \boxed{p \neq 3}$ ↑ ABS!

• si $(3:p)\neq 1 \Rightarrow p=3$, evalúo $h \equiv 0\ (9)$

$h \equiv 49^8 + 8^3 + 6^{10} \equiv 4^8 + (-1)^3 + \underbrace{36^5}_{\equiv 0 (9)} \equiv \overset{7 \equiv -2 (9)}{16^4} - 1 \equiv (-2)^4 - 1 \equiv 15 \equiv 6 \not\equiv 0\ (9)$

• con $p \neq 3$:

• (mod 3): $h \equiv 1^{p^2-1} + 2^p + 0^{p^2+1} \equiv 1 + 2^p \equiv 1 + (-1)^p \underset{(p\neq 2)}{\equiv} 1 - 1 \equiv 0\ (3)$

• si $p=2$ $h \equiv 1 + 4 + 0 \equiv 5 \equiv 2 \not\equiv 0\ (3)$ ABS! $\therefore \boxed{p \neq 2}$

• (mod p)

$h \equiv 49^{p^2-1} + 8^p + 6^{p^2+1} \overset{qpq}{\equiv} 0\ (p)$ ~~analizo cada termino por separado~~

~~$49^{p^2-1} \equiv$ ... pero~~ Quiero usar PTF pero 49 me produce problemas

• si $p = 7 \Rightarrow h \equiv 0 + 1^7 + (-1)^{7^2-1} \equiv 1 + (-1)^{48} \equiv 1 + 1 \equiv 2 \not\equiv 0\ (7)$ ABS! $\therefore \boxed{p \neq 7}$

además ya comprobé que

• $p \neq 7 \Rightarrow (49:p)=1$, $(8:p)=1$ y $(6:p)=1$; uso PTF:

• $49^{p-1} \equiv 1\ (p)$ (x PTF) y se que $p^2-1 = (p-1)(p+1)$

$\Rightarrow 49^{p^2-1} \equiv (49^{p-1})^{p+1} \equiv 1^{p+1} \equiv 1\ (p)$

• $8^p \equiv 8\ (p)$ (x PTF)

• $6^{p-1} \equiv 1\ (p)$ (x PTF) y se que $p^2+1 = (p+1)(p-1)+2$

$\Rightarrow 6^{p^2+1} \equiv (6^{p-1})^{p+1} \cdot 6^2 \equiv 1^p \cdot 6^2 \equiv 6^2 \equiv 36\ (p)$

$p^2 + 0p + 1 \mid p-1$
$-p^2 + p \quad\ \ p+1$
$p + 1$
$-p + 1$
2

$\Rightarrow h \equiv 1 + 8 + 36 \equiv 45 \equiv 0\ (p)$ qpq

La única forma de que $45 \equiv 0\ (p)$ es que $p = 3$ ó $p = 5$

pero anteriormente ya comprobé que $p \neq 3$

$\therefore$ el único p tq $3p \mid 49^{p^2-1} + 8^p + 6^{p^2+1}$ es ~~...~~ $\boxed{p = 5}$ Rta

HOJA N° 3/5

FECHA

(3) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tq $z = \frac{(1-i)^{3n+4}}{2^n(1+i)}$ es imaginario puro

z es imag puro $\Leftrightarrow Re(z) = 0$ pero es que $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$

• $\bar{z} = \overline{(1-i)^{3n+4}} \cdot \overline{\frac{1}{2^n(1+i)}} = (\overline{1-i})^{3n+4} \cdot \frac{1+i}{2^{n+1}} = \frac{(1+i)^{3n+5}}{2^{n+1}}$

• $\frac{1}{1+i} = \frac{\overline{1-i}}{2} = \frac{1+i}{2}$ CA

$\Rightarrow Re(z) = \frac{\frac{(1-i)^{3n+4}}{2^n(1+i)} + \frac{(1+i)^{3n+5}}{2^{n+1}}}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{(1-i)^{3n+4}}{2^{n+1}(1+i)} = -\frac{(1+i)^{3n+5}}{2^{n+2}}$

$\Leftrightarrow (1-i)^{3n+4} = -\frac{1}{2}(1+i)^{3n+6}$

$\Rightarrow \arg((1-i)^{3n+4}) = \arg\left(-\frac{1}{2}(1+i)^{3n+6}\right)$

$\arg(1-i) = \frac{7}{4}\pi$ CA

$\arg(1+i) = \frac{1}{4}\pi$

x Moivre

$\Leftrightarrow (3n+4)\cdot\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \arg\left(-\frac{1}{2}\right) + (3n+6)\left(\frac{1}{4}\pi\right) + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

$/\pi$

$\Leftrightarrow (3n+4)\cdot\frac{7}{4} = 1 + (3n+6)\left(\frac{1}{4}\right) + 2k$

$\Leftrightarrow \frac{21}{4}n + 7 = 1 + \frac{3}{4}n + \frac{3}{2} + 2k \Leftrightarrow \frac{21}{4}n - \frac{3}{4}n - 2k = -7 + 1 + \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{9}{2}n - 2k = -\frac{9}{2} \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} \boxed{9n - 4k = -9}$

$\Leftrightarrow 9n + 9 = 4k \Leftrightarrow 9n + 9 \equiv 0\ (4) \Leftrightarrow n + 1 \equiv 0\ (4)$

$\Leftrightarrow \boxed{n \equiv 3\ (4)}$ Rta

4) Sea $\omega \in \mathbb{C}$ una raíz 35-ava primitiva de la unidad.
Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ que satisfacen

i) $n \equiv 1\ (2)$ ii) $\sum_{j=0}^{3n+1} \omega^{7j} = 0$ y iii) $\overline{\omega}^{15} \in G_{2n+3}$

ii) $\sum_{j=0}^{3n+1} \omega^{7j} = 0 \overset{\text{geometrica}}{\underset{\omega^7 \neq 1}{=}} \dfrac{\omega^{7(3n+2)} - 1}{\omega^7 - 1} \iff \omega^{7(3n+2)} - 1 = 0$

$\iff \omega^{7(3n+2)} = 1 \overset{\omega^{35}=1}{\iff} 35 \mid 7(3n+2) = 21n + 14$

$\iff 21n + 14 \equiv 0\ (35) \overset{/7}{\iff} 3n + 2 \equiv 0\ (5) \iff 3n \equiv 3\ (5)$

(como $(3:5) = 1$ $\exists u \in \mathbb{Z}$ tq $u \cdot 3 \equiv 1\ (5)$) $\iff \boxed{n \equiv 1\ (5)}$ ✓

iii) $\overline{\omega}^{15} \overset{\omega \in G_{35}}{=} \omega^{20}$ y quiero que $\omega^{20} \in G_{2n+3}$

(pero x TEO yo se que si $z \in \mathbb{C}$, $z \in G_K \iff z^K = 1$) $K \in \mathbb{N}$

Entonces $\omega^{20} \in G_{2n+3} \iff (\omega^{20})^{2n+3} = 1$

$\overset{\omega \in G_{35} \text{ primitiva}}{\iff} 35 \mid 40n + 60 \iff 40n + 60 \equiv 0\ (35) \overset{/5}{\iff} 8n + 12 \equiv 0\ (7)$

$\iff 8n \equiv -12\ (7) \iff \overset{1\,(7)}{8}n \equiv 2\ (7) \iff \boxed{n \equiv 2\ (7)}$ ✓

∴ Tengo un sist de ecuaciones $\begin{cases} n \equiv 1\ (2) \\ n \equiv 1\ (5) \\ n \equiv 2\ (7) \end{cases}$ y como 2, 5 y 7 son coprimos 2 a 2 $\exists!$ soluc x TCR

$\begin{cases} n \equiv 1\ (2) \\ n \equiv 1\ (5) \\ n \equiv 2\ (7) \end{cases} \xrightarrow{\text{PROP}} \begin{cases} n \equiv 1\ (10) \\ n \equiv 2\ (7) \end{cases}$ ✓

Tengo $n = 10\overset{\in \mathbb{Z}}{k} + 1 \overset{\text{quiero}}{\equiv} 2\ (7) \iff 10k \equiv 1\ (7) \iff 3k \equiv 1\ (7)$

$\underset{(5:7)=1}{\overset{(3:7)=1}{\iff}} 3 \cdot 5\, k \equiv 1 \cdot 5\ (7) \iff k \equiv 5\ (7) \iff k = 7\overset{\in \mathbb{Z}}{q} + 5$

$\Rightarrow n = 10k + 1 = 10(7q + 5) + 1 = 70q + 51$

$\iff \boxed{n \equiv 51\ (70)}$ Rta ✓

(5) $f = x^6 + 2x^5 - 4x^4 + 13x^2 - 10x + 2$. Factorizar en $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$ sabiendo que $-1+\sqrt{2}$ es una raíz múltiple

⊙ como $-1+\sqrt{2}$ es raíz de $f \overset{TEO}{\Rightarrow} -1-\sqrt{2}$ es raíz de f ¿que dice ese Teorema?

y x TEO también se que tienen la misma multiplicidad en f ¿que dice? Explicar!

⊙ veo la multiplicidad de $-1+\sqrt{2}$ en f' y f''

$f' = 6x^5 + 10x^4 - 16x^3 + 26x - 10$

$f'' = 30x^4 + 40x^3 - 48x^2 + 26$

$f'(-1+\sqrt{2}) = 6(-1+\sqrt{2})^5 + 10(-1+\sqrt{2})^4 - 16(-1+\sqrt{2})^3 + 26(-1+\sqrt{2}) - 10$

$= \ldots$ (evaluo en calculadora) $\ldots = 0$ ✓

$f''(-1+\sqrt{2}) = 30(-1+\sqrt{2})^4 + 40(-1+\sqrt{2})^3 - 48(-1+\sqrt{2})^2 + 26$

$= \ldots$ (evaluo en calculadora) $\ldots = 21{,}5 \neq 0$ ✓

∴ Como $f'(-1+\sqrt{2}) = 0$ y $f''(-1+\sqrt{2}) \neq 0 \Rightarrow \text{mult}(-1+\sqrt{2}, f) = 2$

y como dije al comienzo, si $\text{mult}(-1+\sqrt{2}, f) = 2 \Leftrightarrow \text{mult}(-1-\sqrt{2}, f) = 2$

En conclusión tengo a $-1+\sqrt{2}$ raíz doble y $-1-\sqrt{2}$ raíz doble

⊙ Uno raíces y divido: $(x-(-1+\sqrt{2}))(x-(-1-\sqrt{2})) = x^2 + 2x - 1$ ✓ (x formula)

¿Porque podes?

y se que $(x^2+2x-1)^2 \mid f$ (x las raíces dobles que mostre)

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
x^6 & +2x^5 & -4x^4 & +0x^3 & +13x^2 & -10x & +2 \\
-x^6 & -4x^5 & -2x^4 & +4x^3 & -x^2 & & \\
\hline
 & -2x^5 & -6x^4 & +4x^3 & +12x^2 & -10x & +2 \\
 & +2x^5 & +8x^4 & +4x^3 & -8x^2 & +2x & \\
\hline
 & & 2x^4 & +8x^3 & +4x^2 & -8x & +2 \\
 & & -2x^4 & -8x^3 & -4x^2 & +8x & -2 \\
\hline
 & & & & & & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
x^4+4x^3+2x^2-4x+1 \\
\hline
x^2-2x+2
\end{array}
$$

✓

$(x^2+2x-1)^2$

$= x^4 + 2x^3 - x^2$

$+2x^3 + 4x^2 - 2x$

$-x^2 - 2x + 1$

$= x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

∴ $f = (x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x + 2) \Rightarrow$ no tengo mas raices

dijimos que NO escribieramos esto!

⊙ $\Delta_{x^2-2x+2} = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4$ y se que $\sqrt{-4} = 2i$ en $\mathbb{C}$

$\Rightarrow x = \dfrac{2 \pm 2i}{2}$ → $x_1 = 1 + i$, $x_2 = 1 - i$ ⟩ son raíces de f ✓

◦ En $\mathbb{C}$: la factorización x el TFAlg es de producto de polin simples elevados a alguna potencia

$\therefore F = (x-(-1+\sqrt{2}))^2 (x-(-1-\sqrt{2}))^2 (x-(1+i))(x-(1-i))$ ✓

◦ En $\mathbb{R}$: como no existe un nro al cuadrado "a" en $\mathbb{R}$ tq

$a \in \mathbb{R}$, $a^2 = \Delta_{x^2-2x+2} = -4 \Rightarrow x^2-2x+2$ es irreducible en $\mathbb{R}$

$\therefore F = (x-(-1+\sqrt{2}))^2 (x-(-1-\sqrt{2}))^2 (x^2-2x+2)$ ✓

◦ En $\mathbb{Q}$: x TEO se que las raíces del tipo $a \pm b\sqrt{m}$, $a, b, m \in \mathbb{Q}$ pueden ser factorizados en $\mathbb{Q}$, y yo ya tengo esa factorización

?

$\therefore F = \underbrace{(x^2+2x-1)^2}_{\text{irreducible en } \mathbb{Q}} \underbrace{(x^2-2x+2)}_{\substack{\text{irreducible en } \mathbb{R} \\ \Rightarrow \text{irreducible en } \mathbb{Q}}}$ ✓