Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Examen Final (18-02-2022) resuelto

1. Determinar los valores de a, b y c para los cuáles la derivada direccional en $(1, 2, -1)$ de la función

$$f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$$

tiene un valor máximo de 64 en una dirección paralela al eje z.

Solución: Cómo la derivada direccional de f en $(1, 2, -1)$ tiene su valor máximo (que debe ser 64) en la dirección de ∇f, debemos tener

$$\nabla f(1, 2, -1) = \pm 64(0, 0, 1).$$

Cómo $\nabla f(1, 2, -1) = (4a + 3c, 4a - b, 2b - 2c)$, esto ocurre si y solo si

$$\begin{aligned} &4a + 3c = 0, \\ &4a - b = 0, \\ &2b - 2c = \pm 64, \end{aligned}$$

para lo cuál debe ser

$$c = -\frac{4}{3}a, \quad b = 4a \quad \text{y} \quad 8a + \frac{8}{3}a = \pm 64.$$

Resolviendo este sistema obtemos $(a, b, c) = \pm(6, 24, -8)$.

2. Encontrar los puntos en los que la función $f(x, y) = 3x + 2y$, sujeta a la restricción $2x^2 + 3y^2 = 3$, encuentra su máximo y su mínimo absolutos. Dar el resultado en forma exacta.

Solución: Escribamos

$$g(x, y) = 2x^2 + 3y^2.$$

Cómo la restricción $g(x, y) = 3$ define un conjunto E cerrado y acotado (una elipse), sabemos que f alcanza su máximo y un mínimo absolutos sobre E. Cómo ∇g no se anula sobre E, el Teorema de multiplicadores de Lagrange nos dice que en los puntos (x, y) donde f alcanza estos valores debe ser $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, tenemos que resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
3 &= 4\lambda x, \\
2 &= 6\lambda y, \\
2x^2 + 3y^2 &= 3.
\end{aligned}$$

De las dos primeras ecuaciones se sigue que $x = \frac{3}{4\lambda}$ e $y = \frac{1}{3\lambda}$. Reeemplazando x e y por estos valores en la tercera, obtenemos

$$\frac{9}{8\lambda^2} + \frac{1}{3\lambda^2} = \frac{35}{24\lambda^2} = 3.$$

En consecuencia, $\frac{1}{\lambda} = \pm\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{35}} = \pm\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{35}} = \pm\frac{6\sqrt{70}}{35}$, y, por lo tanto,

$$(x,y) = \left(\frac{3}{4\lambda}, \frac{1}{3\lambda}\right) = \pm\left(\frac{9\sqrt{70}}{70}, \frac{2\sqrt{70}}{35}\right).$$

Así, f alcanza su máximo absoluto sobre E en el punto $\left(\frac{9\sqrt{70}}{70}, \frac{2\sqrt{70}}{35}\right)$; y su mínimo absoluto sobre E, en el punto $\left(-\frac{9\sqrt{70}}{70}, -\frac{2\sqrt{70}}{35}\right)$.

3. Considerese la ecuación $y - 2z + 2 = 2z(x+y)$.

   (a) Pruebe que se puede despejar $z = g(x,y)$ como función de (x,y) en un entorno de $(0,0,1)$.

   (b) Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 de g centrado en $(0,0)$.

Solución: Este ejercicio puede resolverse usando el teorema de la función implícita, pero es más fácil empezar despejando z de la ecuación $y - 2z + 2 = 2z(x+y)$, lo que da

$$g(x,y) = \frac{y+2}{2(x+y+1)},$$

lo que resuelve inmediatamente el item (a). Para resolver el item (b) calculamos

$$
\begin{aligned}
g_x(x,y) &= \frac{-2(y+2)}{4(x+y+1)^2} = -\frac{y+2}{2(x+y+1)^2},\\
g_y(x,y) &= \frac{2(x+y+1)-2(y+2)}{4(x+y+1)^2} = \frac{x-1}{2(x+y+1)^2},\\
g_{xx}(x,y) &= \frac{4(y+2)(x+y+1)}{4(x+y+1)^4} = \frac{y+2}{(x+y+1)^3},\\
g_{xy}(x,y) &= \frac{4(y+2)(x+y+1)-2(x+y+1)^2}{4(x+y+1)^4} = \frac{-x+y+3}{2(x+y+1)^3},\\
g_{yy}(x,y) &= -\frac{4(x-1)(x+y+1)}{4(x+y+1)^4} = -\frac{x-1}{(x+y+1)^3}.
\end{aligned}
$$

En particular, $g(0,0)=1$, $g_x(0,0)=-1$, $g_y(0,0)=-\frac{1}{2}$, $g_{xx}(0,0)=2$, $g_{xy}(0,0)=\frac{3}{2}$ y $g_{xx}(0,0)=1$.

$$
\begin{aligned}
&g(0,0)=1, \qquad g_x(0,0)=-1, \quad g_y(0,0)=-\frac{1}{2},\\
&g_{xx}(0,0)=2, \quad g_{xy}(0,0)=\frac{3}{2}, \quad g_{xx}(0,0)=1.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor de orden 2 de g centrado en $(0,0)$ es el polinomio

$$
T_2(x,y) = 1 - x - \frac{y}{2} + x^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{1}{2}y^2.
$$

4. Calcule el area de la región acotada R encerrada por la curva de ecuación $y=\sqrt{-4-x}$, la recta tangente a dicha curva en el punto $(-8,2)$ y el eje x.

   Solución: Para calcular la recta tangente T a la curva en $(-8,2)$, calculamos $y'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-4-x}}$. Evaluando esta fórmula en $x=-8$ vemos que

   $$
   y'(-8) = -\frac{1}{2\sqrt{4}} = -\frac{1}{4}.
   $$

   Por lo tanto $T(x) = -\frac{1}{4}x$ (notemos que $T(-8)=2$). Notemos también que $y(-4)=0$ y que $y'(x)$ es decreciente en el intervalo $[-8,-4]$. Por lo tanto $y(x) \le T(x)$ para todo $x \in [-8,-4]$, y, en consecuencia, el área de R es el área del triángulo de vértices $(-8,0)$, $(0,0)$ y $(-8,2)$

menos el area de la región R_1 entre el gráfico de $y = \sqrt{-4-x}$ y el segmento de extremos $(-8, 0)$ y $(-4, 0)$. Cómo

$$R_1 = \int_{-8}^{-4} (-4-x)^{1/2}\ dx = -\frac{2}{3}(-4-x)^{3/2}\Big|_{-8}^{-4} = \frac{2}{3}4^{3/2} = \frac{16}{3}.$$

Así, el área de R es $8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$.