1	2	3	4	Calificación
[redacted]				

Aprobado

Probabilidad y Estadística (C)

Primer parcial - 10/10/2019

Complete esta hoja y entréguela con el resto del examen.
Realice cada ejercicio en hoja separada. *Escriba el nombre en cada una.*
Al retirarse debe firmar una hoja de asistencia.

APELLIDO Y NOMBRES: [redacted] ..... Nº DE LIBRETA: [redacted] ...

mail: [redacted] ... FIRMA: [redacted] ...

Turno: Tarde: 14 a 17 hs | Noche: 19 a 22 hs | Nº de hojas entregadas: 4

Criterio de aprobación: Para aprobar este examen es necesario sumar al menos 60 puntos.

Recuerde definir con palabras los eventos y las variables aleatorias involucradas, nombres y parámetros de las distribuciones. ***Justifique claramente sus afirmaciones.***

1. (25 p) Una fábrica de alfajores tiene dos sedes; en la sede de Quilmes ($Y = 0$) los alfajores se rellenan manualmente mientras que en la sede de Pilar ($Y = 1$) se utiliza un procedimiento mécanico. La probabilidad de que un alfajor producido por la sede Quilmes presente un defecto es 0.8, mientras que la probabilidad de que uno fabricado por la sede Pilar se encuentre *defectuoso* es 0.3. Cada sede empaqueta sus alfajores en cajas con $n = 8$ unidades. La sede Pilar produce el 90% de las cajas consumidas mientras que la sede Quilmes abastece el 10% restante. Asuma que el estado de un alfajor es independiente de estado de los otros. Denotemos con X a la variable aleatoria que indica el número alfajores defectuosos en una caja.

   (a) (3 p) Calcule la probabilidad de que una caja producida por la sede Quilmes tenga 5 alfajores defectuosos.

   (b) (5 p) Calcule la probabilidad de que una caja producida por la empresa y elegida al azar tenga 5 alfajores defectuosos (es decir $X = 5$).

   (c) (10 p) Se examina una caja y se encuentran $X = 5$, ¿cúal es la probabilidad de que haya sido producida por la sede Quilmes? ¿Y por la sede Pilar? Se examina una caja y se encuentran 5 alfajores defectuosos, ¿cree usted que se fabricó en la sede Quilmes o Pilar?

   (d) (7 p) Obtenga $E(X)$ y $V(X)$.

2. (25 p) Sean $(X_i)_{i\geq 1}$ variables aleatorias i.i.d., $X_i \sim \mathcal{U}(0,\theta)$, $\theta > 0$. Consideremos M_n, el máximo de las primeras n variables, definido por

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}. \tag{1}$$

   (a) (10 p) Calcule F_n y f_n, la función de distribución acumulada y la densidad de M_n, respectivamente.

   (b) (5 p) Si $0.1 < \theta$, calcule $P(|M_n - \theta| \geq 0.1)$.

   (c) (5 p) Para $0 < \varepsilon < \theta$, calcule $P(|M_n - \theta| \geq \varepsilon)$.

   (d) (5 p) Pruebe que $(M_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilidad a θ.

3. (30 p) Se desea determinar una magnitud μ. Para ello se realizan n mediciones independientes de la misma magnitud en idénticas condiciones, que denotaremos con $X_1, \dots, X_n$. Asumimos el siguiente modelo para las variables aleatorias X_i

$$X_i = \mu + \varepsilon_i$$

donde μ es la verdadera magnitud desconocida, y ε_i es la variable aleatoria que denota el error de la i-ésima medición. Asumimos que $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución normal con media cero y que su desviación estándar es 0.5.

(a) (2 p) Obtenga la distribución de las variables X_i, su esperanza y su varianza.

(b) (6 p) Obtenga la distribución de $\overline{X}_n$, su esperanza y su varianza.

(c) (9 p) Calcule la probabilidad de que el promedio de $n = 5$ mediciones diste de la verdadera magnitud μ en menos de 0,1 unidades.

(d) (11 p) Determine cuántas mediciones son necesarias para que

$$P\left(|\overline{X}_n - \mu| < 0,1\right) \geq 0.99.$$

(e) (2 p) ¿Las probabilidades calculadas en los items anteriores, son exactas o aproximadas?

4. (20 p) Sea (X, Y) un vector aleatorio con $X \sim U(0,1)$ e $Y = 3X + 5 + W$ donde $W \sim N(0, \sigma^2)$ y X y W son independientes.

(a) (5 p) Calcule $E(Y)$, $V(Y)$ y $E(XY)$.

(b) (5 p) Calcule $\rho(X, Y)$.

(c) (10 p) ¿A qué tiende $\rho(X, Y)$ cuando σ^2 tiende a 0? ¿Y cuándo σ^2 tiende a $+\infty$? ¿Puede interpretar el resultado?

$R_X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

25P ① a) W = "# DE ALFAJORES DEFECTUOSOS EN UNA CAJA DE QUILMES".

$W \sim Bi\,(8; 0{,}8)$

3P $P(W=5) = \binom{8}{5}(0{,}8)^5\,(0{,}2)^3 \cong 0{,}1468$

b) $P(X=5) \overset{\text{LPT}}{=} P(W=5)\,P(Y=0) + P(Z=5)\,.\,P(Y=1)$

5P

$\cong 0{,}1468\,.\,0{,}1 + 0{,}0467\,.\,0{,}9 = 0{,}0567$

Z = "# DE ALFAJORES DEFECTUOSOS EN UNA CAJA DE PILAR.

$P(Z=5) = \binom{8}{5}(0{,}3)^5\,(0{,}7)^3 \simeq 0{,}0467$

c) 10P $P(Y=0 \mid X=5) \overset{\text{BAYES}}{=} \dfrac{P(X=5 \mid Y=0)\,P(Y=0)}{P(X=5)} = \dfrac{0{,}1468\,.\,0{,}1}{0{,}0567} \simeq 0{,}26$

$P(Y=1 / X=5) \overset{\text{BAYES}}{=} \dfrac{P(X=5 \mid Y=1)\,P(Y=1)}{P(X=5)} \cong 0{,}7413$

YO CREO QUE SE FABRICÓ EN LA SEDE DE PILAR.

d) $E(X) = \sum_{i=0}^{8} i\,.\,P(X=i) = \sum_{i=0}^{8} i\left[\left(\binom{8}{i}.(0{,}8)^i(0{,}2)^{8-i}\,.\,0{,}1\right) + \left(\binom{8}{i}(0{,}3)^i(0{,}7)^{8-i}\,.\,0{,}9\right)\right]$

7P

CALCULADORA

$\cong 2{,}8$

$E(X^2) = \sum_{i=0}^{8} i^2\,.\,P(X=i) \cong 10{,}92$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$= 3{,}08$

②

a)

$$F_n(t) = P(M_n \le t) = P(X_1 \le t \cap \dots \cap X_n \le t)$$

$$\underset{\text{INDEP}}{=} P(X_1 \le t) \dots P(X_n \le t) = \left[F_{X_1}(t)\right]^n$$

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \left(\frac{t}{\theta}\right)^n & 0 < t < \theta \\ 1 & t \ge \theta \end{cases}$$

$$f_n(t) = (F_n(t))' = n\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta}\, I_{(0,\theta)}(t)$$

b) ⊛

c) $P(|M_n - \theta| \ge \varepsilon) = 1 - P(|M_n - \theta| < \varepsilon)$

$$= 1 - P(\theta - \varepsilon < M_n < \theta + \varepsilon)$$

$$= 1 - \left[P(M_n < \theta + \varepsilon) - P(M_n \le \theta - \varepsilon)\right]$$

$$= 1 - F_n(\theta + \varepsilon) + F_n(\theta - \varepsilon)$$

$$= 1 - 1 + \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n$$

⊛ $P(|M_n - \theta| \ge 0{,}1) = \left(\frac{\theta - 0{,}1}{\theta}\right)^n$

d) $\lim_{n \to \infty} P(|M_n - \theta| \ge \varepsilon) = 0$

$$\lim_{n \to \infty} P(|M_n - \theta| \ge \varepsilon) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n = 0.$$

③

a) $X_i = \mu + \varepsilon_i \qquad \varepsilon_i \sim N(0; 0{,}25)$

$X_i \sim N(\mu; 0{,}25) \qquad E(X_i) = \mu \qquad V(X_i) = 0{,}25$

b) $\bar{X}_m = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} X_i}{m} \qquad \bar{X}_m \sim N\left(\mu, \dfrac{0{,}25}{m}\right)$

$$E(\bar{X}_m) = E\left[\frac{\sum_1^m X_i}{m}\right] = \frac{1}{m}\sum_1^m E(X_i)$$

$$= \cancel{m}\,\frac{E(X_i)}{\cancel{m}} = E(X_i) = \mu$$

$$V(\bar{X}_m) = V\left[\frac{\sum^m X_i}{m}\right] = \frac{1}{m^2}\sum^m V(X_i) = \frac{1}{m}V(X_i) = \frac{0{,}25}{m}$$

c) $P(|\bar{X}_5 - \mu| < 0{,}1) = P(-0{,}1 < \bar{X}_5 - \mu < 0{,}1)$

$$= P\left(\frac{-0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}25}{5}}} < \frac{\bar{X}_5 - \mu}{\sigma} < \frac{0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}25}{5}}}\right)$$

$$\cong 2\,\Phi\left(\frac{0{,}1}{\sqrt{1/20}}\right) - 1 \cong 0{,}34$$

d) $P(|\bar{X}_m - \mu| < 0{,}1) \geq 0{,}99$

$$P(|\bar{X}_m - \mu| < 0{,}1) = P\left(\frac{-0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}25}{m}}} < Z < \frac{0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}25}{m}}}\right)$$

$$= 2\,\Phi\left(\frac{0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}25}{m}}}\right) - 1 \geq 0{,}99$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{0{,}1}{\sqrt{1/4m}} = 2{,}58. \quad \Rightarrow m \geq 167$$

e) SON EXACTAS (EN REALIDAD APROXIMADAS XQ USÉ LA TABLA NORMAL, PERO NO USÉ DISTRIBUCIÓN APROX.).

20/20

(4) a) $E(Y) = 3E(X) + 5 + E(W)$

$= 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 + 0$

$= 3/2 + 5 = 6{,}5$ ✓

$V(Y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{POR} \\ X \perp W}}{=} 3^2 \cdot V(X) + V(W)$

$= 3^2 \cdot \frac{1}{12} + \sigma^2$

$= 3/4 + \sigma^2$ ✓

$E(XY) = E(X \cdot (3X + 5 + W))$

LA ESPERANZA DE LA SUMA ES LA SUMA DE LA ESPERANZA

$= E(3X^2 + 5X + XW)$

$\underset{\substack{\uparrow \\ X \perp\!\!\!\perp W}}{=} 3E(X^2) + 5E(X) + E(XW)$

$= 3 \cdot 1/3 + 5 \cdot 1/2 + 0 = 3{,}5$ ✓

$f_{XW} \overset{X \perp W}{=} f_X \cdot f_W = \frac{1}{1} I_{(0,1)}(x) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(w-0)}{2\sigma^2}}$

$E(XW) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xw \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-w}{2\sigma^2}}$

$= \int_0^1 x \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} w \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-w}{2\sigma^2}}}_{E(W)=0}$

$= \int_0^1 x \cdot 0 = 0$

b) $\rho(X,Y) = \dfrac{COV(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = ⊛$

$COV(XY) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$= 3,5 - 6,5 \cdot 1/2 = 1/4$

$\sigma_X = \sqrt{\dfrac{1}{12}} \cong 0,29$

$\sigma_Y = \sqrt{3/4 + \sigma^2}$

⊛ $\dfrac{1/4}{\sqrt{1/12}\sqrt{3/4+\sigma^2}}$ ✓

c) CUANDO $\sigma^2 \to 0$

$\rho(X,Y) \to 1$ ✓

CUANDO $\sigma^2 \to +\infty$

$\rho(X,Y) \to 0$ ✓

LO QUE INTERPRETO ES QUE CUANDO $\sigma^2 \to 0$, X E Y ESTÁN MUY RELACIONADAS LINEALMENTE, ES DECIR CRECEN EN IGUAL PROPORCIÓN, Y ESTO SE DEBE A QUE Y EN UNA COMB. LINEAL DE X.

CUANDO $\sigma^2 \to +\infty$ ES LO CONTRARIO, NO SE RELACIONAN, Y NINGUNA ES COMB. LINEAL DE LA OTRA. ✓

¡Muy bien!