PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)

PRÁCTICA SOBRE CADENAS DE MARKOV.

1. El ascensor de un edificio con planta baja y dos pisos realiza viajes de uno a otro piso. Definimos $X_n =$ piso en el que el ascensor finaliza el viaje n-ésimo. Supondremos que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ sigue una cadena de Markov. Se sabe que la mitad de los viajes que parten del la planta baja se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25 % de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en la planta baja.

   a) Calcular la matriz de probabilidades de transición de la cadena.

   b) Dibujar el grafo asociado.

   c) Si en este momento el ascensor se encuentra en el piso 1, calcular la probabilidad de que luego de tres viajes termine en pb.

   d) Si luego de cada reparación técnica el ascensor tiene las mismas chances de arrancar en cada piso, calcular la probabilidad de que en su segundo viaje termine en el piso 2.

   e) ¿Cuál es la probabilidad de que, a largo plazo, el ascensor se encuentre en cada uno de los tres pisos? Responda esta pregunta usando simulación y/o medida invariante.

2. El precio de una acción se mueve día a día dentro de los valores $\{1, 2, 3, 4\}$ (expresado en alguna unidad monetaria). Sea $X_n =$ precio de la acción el día n. Supondremos que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una cadena de Markov verificando: Si $X_n = j$ con $j = 2$ o 3, luego $X_{n+1} = j - 1$ con probabilidad 0,2 y $X_{n+1} = j + 1$ con probabilidad 0,8. Si $X_n = 1$ entonces $X_{n+1} = 2$ con probabilidad 1. Finalmente, si $X_n = 4$ entonces $X_{n+1} = 3$ con probabilidad 1.

   a) Escribir la matriz de probabilidades de transición de la cadena.

   b) Dibujar el grafo asociado.

   c) Si hoy la acción tomó el valor 3, cuál es la probabilidad de que quede en baja mañana.

   d) Calcular el precio promedio de la acción en el largo plazo. Hágalo mediante simulación y/o medida invariante.

3. Tenemos tres bolitas blancas y tres bolitas negras distribuidas al azar en dos urnas de forma tal que cada urna contiene tres bolitas. En cada paso saco una bola de cada urna y las cambio de urna. Sea $X_n =$ Cantidad de bolitas blancas que hay en la urna 1 en el paso n.

   a) Dedique un buen rato a convencerse de que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una cadena de Markov.

   b) Encontrar la matriz de transición asociada a este problema.

   c) Dibujar el grafo asociado a esta cadena.

P *d*) Usando el item anterior, y la ley de los grandes números para cadenas de Markov calcular en forma aproximada $P(X_k = j)$. $\approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{X_i = j\}$ $\underset{\text{LGN-MARKOV}}{\approx} \mu(j)$

4. Consideremos el siguiente experimento llamado **Esquema de Ehrenfest**. Tenemos N bolitas numeradas distribuidas al azar en dos urnas. Elijo un número al azar entre 1 y N y extraigo la bola con dicho número para luego cambiarla de urna. Este experimento se repite numerables veces.
Definimos
   - X_k = cantidad de bolitas que hay en la Urna 1 después de la k-ésima vez que repito el experimento (k–ésima extracción).
   - $p_k(j)$ = probabilidad de que la Urna 1 tenga j bolitas después de la k-ésima extracción.
   - $p_k(i,j)$ = probabilidad de que la Urna 1 tenga j bolitas después de la extracción k dado que después de la extracción $k-1$ la Urna 1 tiene i bolitas.

   a) ¿Dependen los $p_k(i,j)$ de k?

   b) Calcule estas probabilidades para $i, j \in \{0, 1, ..., N\}$. (A una matriz P con estas entradas se la llama matriz de transición.)

   c) Probar que
$$\mu(j) = \binom{N}{j} \frac{1}{2^N}, \quad j = 0, \ldots, N.$$
   es invariante para la cadena.

   d) (Optativo) Simular este experimento para $N = 10, 50, 100$. Es decir, para cada valor de N obtener realizaciones de las variables X_k, $k = 1, \ldots, M$ con $M = 7, 20, 1200$. Compare los resultados numéricos obtenidos con el resultado del ítem anterior.

Distribución estacionaria

.) $\nu = (\nu(1)\ \nu(2) \ldots \nu(K))$ suman 1

.) $\nu P = \nu$

ν es un autovector de autovalor 1.

$P = \begin{pmatrix} - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix}$

$\nu = (a\ b\ c)$

$a + b + c = 1$

$a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$.

$\nu P = \nu$

$\underbrace{(a\ b\ c)\ P}_{\left(\frac{3}{4}b + c,\ \frac{a}{2},\ \frac{a}{2} + \frac{b}{4}\right)} = (a\ b\ c)$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}b + c = a \\ \frac{a}{2} = b \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{4} = c \end{cases}$$

1

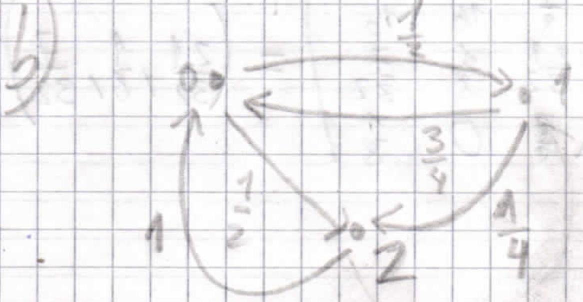
1.

$S = \{0, 1, 2\}$

a)

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b)



c) .) $(0, 1, 0) \cdot P^{(3)} = (\_ , \_ , \_)$

distribución

Rta

otra forma .) Calculo $P^{(3)}_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$

Me pide calcular

$P(X_3 = 0 \mid X_0 = 1) =$

piso 0 piso 1

$= (P^{(3)})_{1,0}$

Supongo que arranco con igual prob en cada piso quiero calcular la probabilidad llegue a planta baja en 3 pasos

.) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cdot P^{(3)} = (\_ , \_ , \_)$

Rta

.) Calculo $P^{(3)} = \begin{pmatrix} \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$

$$\cancel{p_0^{(3)}}\; P(X_3=0) = \sum_{i=0}^{2} \underbrace{P(X_3=0 \mid X_0=i)}_{p_{i0}^{(3)}} \underbrace{P(X_0=i)}_{1/3} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(p_{00}^{(3)} + p_{10}^{(3)} + p_{20}^{(3)}\right)$$

c)

$$p^{(0)} = (0,1,0)$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{7}{16} & \frac{7}{16} \\ \frac{21}{32} & \frac{1}{8} & \frac{7}{32} \\ \frac{7}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$p^{(3)} = p^{(0)} P^3 = (0,1,0) \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{7}{16} & \frac{7}{16} \\ \frac{21}{32} & \frac{1}{8} & \frac{7}{32} \\ \frac{7}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \left(\frac{21}{32}, \frac{1}{8}, \frac{7}{32}\right)$$

$$P(X_3=0 \mid X_0=1) = \frac{21}{32}$$

d) $$P(X_2=2) = \sum_{i=0}^{2} P(X_2=2 \mid X_0=i) P(X_0=i)$$

$$p^{(0)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \qquad P^2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$p^{(2)} = p^{(0)} P^2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P(X_2=2) = \frac{1}{3}$$

②

e) Sea $p^{(\infty)} = \mu$

$$\mu P = \mu$$

$$\left(\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)}\right)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\mu^{(1)} + \mu^{(2)} = \mu^{(0)} & ① \\ \frac{1}{2}\mu^{(0)} = \mu^{(1)} & ② \\ \frac{1}{2}\mu^{(0)} + \frac{1}{4}\mu^{(1)} = \mu^{(2)} & ③ \end{cases}$$

② $\mu^{(0)} = 2\mu^{(1)}$

③ $\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\mu^{(1)} + \frac{1}{4}\mu^{(1)} = \mu^{(2)}$

$$4\mu^{(1)} + \mu^{(1)} = 4\mu^{(2)}$$

$$\mu^{(2)} = \frac{5}{4}\mu^{(1)}$$

$$\mu^{(0)} + \mu^{(1)} + \mu^{(2)} = 1$$

$$2\mu^{(1)} + \mu^{(1)} + \frac{5}{4}\mu^{(1)} = 1$$

$$\mu^{(1)} = \frac{4}{17}$$

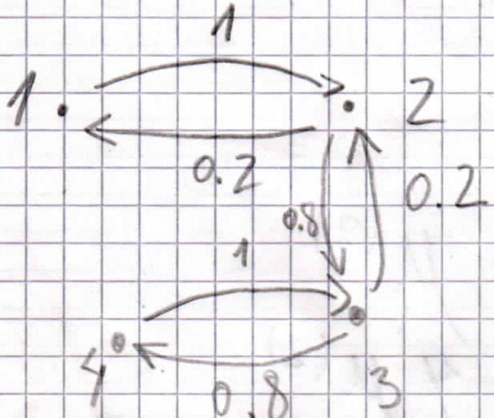
$$P^{(\infty)} = \left(\frac{8}{17}, \frac{4}{17}, \frac{5}{17}\right)$$

$$PP^{(\infty)} = \left(\frac{8}{17}, \frac{4}{17}, \frac{5}{17}\right)$$

2.

a)
$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

b)



c) $P(X_{n+1} < 3 \mid X_n = 3) = 0.2$

③

д) $\mu P = \mu$

$$(\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \mu^{(3)}, \mu^{(4)}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \mu^{(3)}, \mu^{(4)})$$

① $\mu^{(2)} 0.2 = \mu^{(1)}$

② $\mu^{(1)} + \mu^{(3)} 0.2 = \mu^{(2)}$

③ $\mu^{(2)} 0.8 + \mu^{(4)} = \mu^{(3)}$

④ $\mu^{(3)} 0.8 = \mu^{(4)}$

① → ②" $\mu^{(2)} 0.2 + \mu^{(3)} 0.2 = \mu^{(2)}$

$$\mu^{(3)} 0.2 = 0.8 \mu^{(2)}$$

$$\mu^{(3)} = 4 \mu^{(2)}$$

③ $\mu^{(2)} 0.8 + \mu^{(4)} = 4 \mu^{(2)}$

$$\mu^{(4)} = 3.2 \mu^{(2)}$$

$$0.2 \mu^{(2)} + \mu^{(2)} + 4 \mu^{(2)} + 3.2 \mu^{(2)} = 1$$

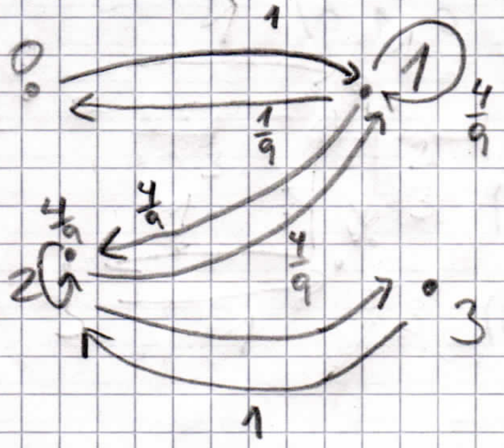
$$\mu^{(2)} = \frac{5}{42}$$

$$p^{(\infty)} = \left(\frac{1}{42}, \frac{5}{42}, \frac{10}{21}, \frac{8}{21} \right)$$

$$\left\langle (1,2,3,4), \left(\frac{1}{42}, \frac{5}{42}, \frac{10}{21}, \frac{8}{21} \right) \right\rangle = \frac{135}{42} = 3.214$$

b) $P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

c)



$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{20}x_3, \frac{1}{4}x_3, x_4, \frac{4}{5}x_3\right)$

$\frac{1}{20}x_3 + \frac{1}{4}x_3 + 1x_3 + \frac{4}{5}x_3 = 1$

$\frac{21}{10}x_3 = 1$

$x_3 = \frac{10}{21}$

$p^{(\infty)} = \left(\frac{1}{42}, \frac{5}{42}, \frac{10}{21}, \frac{8}{21}\right)$ ✓ $p \cdot p^{\infty} = p^{(\infty)}$

3)

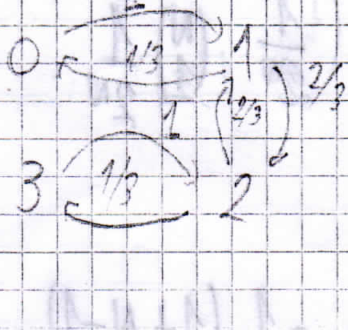
b) $P = \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} & \end{array}$

X_n = # bolitas que hay en la urna 1 en el paso n

$P_{x,y} = \begin{cases} \frac{x}{3} & \text{si } y = x-1 \\ \frac{3-x}{3} & \text{si } y = x+1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$S = \{0, 1, 2, 3\}$ → espacio de estados

c)



d) $\lim_{n\to\infty} P(X_k = j) = \mu(j)$

4) Dé ya ré que la matriz de tr: $P_{ij} = \begin{cases} \frac{K}{N} & \text{si } j=K-1 \\ \frac{N-K}{N} & \text{si } j=K+1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

b)

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & & & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{N} & 0 & \frac{N-3}{N} \cdots & 0 \\ \vdots \\ 0 & \cdots & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{fila } 0 \\ \text{" } 1 \\ \text{" } 2 \\ \\ \text{fila } N \text{ estado inicial de } N \text{ bolitas} \end{array}$$

c) $\mu(j) = \binom{N}{j} \frac{1}{2^N} \quad j = 0 \ldots N$

$\mu = \left(\mu(0), \mu(1), \mu(2) \ldots \mu(j)\right) = \left(\binom{N}{0}\frac{1}{2^N}, \binom{N}{1}\frac{1}{2^N}, \binom{N}{2}\frac{1}{2^N} \cdots \binom{N}{j}\frac{1}{2^N}\right)$

$\mu P = \mu$

$$\left(\binom{N}{0}\frac{1}{2^N}, \binom{N}{1}\frac{1}{2^N} \cdots \binom{N}{j}\frac{1}{2^N}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} \cdots & 0 \\ 0 & & & & \vdots \\ \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2^N}, \binom{N}{1}\frac{1}{2^N} \cdots\right)$$

$$N\frac{1}{2^N} = \frac{1}{2^N} + \frac{2}{N}\frac{1}{2}(N-1)N\frac{1}{2^N} = \frac{1}{2^N}(1+N-1) = \frac{1 * N}{2^N}$$