FINAL DE ÁLGEBRA I
(01-03-23)

N. I.
(nibanez123@gmail.com)

"Tu recuerdo es de luz, de humo, de estanque en calma."
Pablo Neruda

Ejercicio 1

Sea $w = e^{\frac{\pi}{3}i} \in \mathbb{C}$ y sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por

$$z_1 = 1 - w \quad \text{ y } \quad z_{n+1} = -z_n^4, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Conjeturar el valor de z_n para todo $n \in \mathbb{N}$ y probar la validez de la afirmación.

Resolución:

Calculemos los primeros términos de la sucesión para intentar conjeturar una fórmula cerrada para ella. Tenemos que

- $$z_1 = 1 - w = 1 - \left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 1 - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isen\left(-\frac{\pi}{3}\right) = e^{-\frac{\pi}{3}i}.$$

- $$z_2 = -z_1^4 = -(e^{-\frac{\pi}{3}i})^4 = -e^{-\frac{4\pi}{3}i} = e^{\pi i}e^{-\frac{4\pi}{3}i} = e^{-\frac{\pi}{3}i}.$$

, de donde conjeturamos que la sucesión es constante, es decir, que $z_n = e^{-\frac{\pi}{3}i}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Usamos inducción para probar la conjetura. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, la afirmación dada por

$$P(n) : z_n = e^{-\frac{\pi}{3}i}.$$

Veamos que vale $P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 1$ se tiene que $z_1 = e^{-\frac{\pi}{3}i}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos verdadera $P(n)$ y veamos que lo es $P(n+1)$. Tenemos que

$$z_{n+1} = -z_n^4 = -(e^{-\frac{\pi}{3}i})^4 = e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

, donde en la segunda igualdad usamos la hipótesis inductiva.

Probados el caso base y el paso inductivo, se concluye que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

Ejercicio 2

Hallar todos los pares $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que satisfacen simultáneamente

$$\sum_{k=1}^{50} (ka + b) = 6675 \quad \text{y} \quad 17b^2 \equiv 68 \pmod{85}.$$

Resolución:

Tenemos que

$$\begin{aligned} 6675 &= \sum_{k=1}^{50} (ka + b) = \left(\sum_{k=1}^{50} k \right) a + \left(\sum_{k=1}^{50} 1 \right) b = \left(\frac{50(50+1)}{2} \right) a + 50b \\ &= 1275a + 50b \end{aligned}$$

, y por lo tanto nos queda la ecuación de congruencia

$$1275a + 50b = 6675$$

, que es equivalente a

$$51a + 2b = 267$$

, pues $(1275:50)=25$. Una solución particular para ella es $(a_o,b_0)=(5,6)$, y por lo tanto su conjunto de soluciones es

$$\{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : a=5-2k \text{ y } b=6+51k,\ \text{con } k\in\mathbb{Z}\}.$$

Como además debe ser $17b^2\equiv 68 \pmod{85}$, resulta

$$\begin{aligned}
17(6+51k)^2 &\equiv 68 \pmod{85}\\
17(36+612k+2601k^2) &\equiv 68 \pmod{85}\\
612+10404k+44217k^2 &\equiv 68 \pmod{85}\\
17+34k+17k^2 &\equiv 68 \pmod{85}\\
17(1+k)^2 &\equiv 17\cdot 4 \pmod{17\cdot 5}\\
(1+k)^2 &\equiv 4 \pmod{5}.
\end{aligned}$$

Luego,

- $k\equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow (1+k)^2\equiv(1+0)^2\equiv 1 \pmod 5$.
- $k\equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow (1+k)^2\equiv(1+1)^2\equiv 4 \pmod 5$.
- $k\equiv 2 \pmod 5 \Rightarrow (1+k)^2\equiv(1+2)^2\equiv 9\equiv 4 \pmod 5$.
- $k\equiv 3 \pmod 5 \Rightarrow (1+k)^2\equiv(1+3)^2\equiv 16\equiv 1 \pmod 5$.
- $k\equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow (1+k)^2\equiv(1+4)^2\equiv 25\equiv 0 \pmod 5$.

Por lo tanto debe ser $k\equiv 1 \pmod 5$ o $k\equiv 2 \pmod 5$, es decir, $k=5l+1$ o $k=5l+2$ con $l\in\mathbb{Z}$.

Se concluye así que los pares $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ buscados son los de la forma

$$(a,b)=(5-2k,6+51k)=(5-2(5l+1),6+51(5l+1))=(3-10l,57+255l)$$

y

$$(a,b)=(5-2k,6+51k)=(5-2(5l+2),6+51(5l+2))=(1-10l,108+255l)$$

con $l\in\mathbb{Z}$.

■

Ejercicio 3

a) Sea $a \in \mathbb{Z}$ y sea p primo positivo tal que $p \neq 3$, $p \neq 7$ y $p \neq 17$. Probar que $p \nmid (51a : a^{512} + 21)$.

b) Describir todos los $a \in \mathbb{Z}$ que satisfacen que $(51a : a^{512} + 21) = 7$

Resolución:

Sea $d = (51a : a^{512} + 21)$.

a) Tenemos que

$$d \mid 51a \;\text{ y }\; d \mid a^{512}+21 \;\Rightarrow\; d \mid 51a^{512} \;\text{ y }\; d \mid 51a^{512}+1071 \;\Rightarrow\; d \mid 1071$$

, lo que implica que los únicos primos positivos que pueden dividir a d son 3, 7 y 17, pues $1071 = 3^2 \cdot 7 \cdot 17$ y $d \in Div_+(1071)$, de donde se concluye lo que se quería probar.

b) Para que $d = 7$, $a \in \mathbb{Z}$ debe ser tal que $3 \nmid d$, $7 \mid d$ y $17 \nmid d$.

En primer lugar, como $3 \mid 51$ y $3 \mid 21$, resulta

$$3 \nmid d \;\Leftrightarrow\; 3 \nmid a^{512}+21 \;\Leftrightarrow\; 3 \nmid a^{512} \;\Leftrightarrow\; 3 \nmid a$$

, donde la última equivalencia vale por ser 3 un número primo.

En segundo lugar,

$$7 \mid d \;\Leftrightarrow\; 7 \mid 51a \;\text{ y }\; 7 \mid a^{512}+21 \;\Leftrightarrow\; 7 \mid a \;\text{ y }\; 7 \mid a^{512} \;\Leftrightarrow\; 7 \mid a$$

, donde en la segunda equivalencia usamos que $7 \perp 51$ y que $7 \mid 21$.

En tercer y último lugar, como $17 \mid 51$,

$$17 \nmid d \;\Leftrightarrow\; 17 \nmid a^{512}+21 \;\Leftrightarrow\; a^{512}+21 \not\equiv 0 \pmod{17}$$
$$\Leftrightarrow\; a^{512} \not\equiv 13 \pmod{17}.$$

Si $17 \mid a$, resulta $a^{512} \equiv 0 \not\equiv 13 \pmod{17}$.

Si $17 \nmid a$, por el PTF resulta $a^{512} \equiv a^{r_{16}(512)} \equiv a^0 \equiv 1 \not\equiv 13 \pmod{17}$.

Se concluye así que los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $d = 7$ son aquellos tales que $3 \nmid a$ y $7 \mid a$, es decir, $a \equiv 1 \pmod{3}$ y $a \equiv 0 \pmod{7}$ o $a \equiv 2 \pmod{3}$ y $a \equiv 0 \pmod{7}$, o sea, $a \equiv 7 \pmod{21}$ o $a \equiv 14 \pmod{21}$.

■

Ejercicio 4

Factorizar en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio

$$f = X^6 - 2X^5 + 7X^4 - 8X^3 + 16X^2 - 8X + 12$$

sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura en $\mathbb{C}$, que es además múltiple.

Resolución:

Por hipótesis existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $f(bi) = f'(bi) = 0$, donde

$$f' = 6X^5 - 10X^4 + 28X^3 - 24X^2 + 32X - 8.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(bi) &= (bi)^6 - 2(bi)^5 + 7(bi)^4 - 8(bi)^3 + 16(bi)^2 - 8(bi) + 12 \\ &= -b^6 - 2b^5 i + 7b^4 + 8b^3 i - 16b^2 - 8bi + 12 \\ &= (-b^6 + 7b^4 - 16b^2 + 12) + i(-2b^5 + 8b^3 - 8b) = 0 \\ &\Leftrightarrow -b^6 + 7b^4 - 16b^2 + 12 = -2b^5 + 8b^3 - 8b = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(bi) &= 6(bi)^5 - 10(bi)^4 + 28(bi)^3 - 24(bi)^2 + 32(bi) - 8 \\ &= 6b^5 i - 10b^4 - 28b^3 i + 24b^2 + 32bi - 8 \\ &= (-10b^4 + 24b^2 - 8) + i(6b^5 - 28b^3 + 32b) = 0 \\ &\Leftrightarrow -10b^4 + 24b^2 - 8 = 6b^5 - 28b^3 + 32b = 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$-2b^5 + 8b^3 - 8b = 0 \;\text{ y }\; 6b^5 - 28b^3 + 32b = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3(-2b^5 + 8b^3 - 8b) + (6b^5 - 28b^3 + 32b) = -4b^3 + 8b = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 4b(-b^2 + 2) = 4b(\sqrt{2} - b)(\sqrt{2} + b)$$

$$\Rightarrow \quad b = 0 \;\text{ o }\; b = \sqrt{2} \;\text{ o }\; b = -\sqrt{2}$$

(notar que como $f \in \mathbb{R}[X]$, si resulta $b = \sqrt{2}$, entonces $mult(-\sqrt{2}i, f) = mult(\sqrt{2}i, f)$, y viceversa). Como no puede ser $b = 0$, pues por ejemplo $-0^6 + 7 \cdot 0^4 - 16 \cdot 0^2 + 12 = 12 \neq 0$, resulta $b = \sqrt{2}$. Entonces,

$$(X - \sqrt{2}i)^2 (X + \sqrt{2}i)^2 = (X^2 + 2)^2 = (X^4 + 4X^2 + 4) \mid f.$$

Calculando se obtiene

$$f = (X^2 - 2X + 3)(X^4 + 4X^2 + 4).$$

Luego, las factorizaciones de f son $(X^2 - 2X + 3)(X^2 + 2)^2$ en $\mathbb{Q}[X]$ y en $\mathbb{R}[X]$, y $(X - (1 + \sqrt{2}i))(X - (1 - \sqrt{2}i))(X - \sqrt{2}i)^2(X + \sqrt{2}i)^2$ en $\mathbb{C}[X]$.

$\blacksquare$