Álgebra 1 - 2do Parcial - **Tema A**

7 de Julio de 2023

Apellidos: OTAZUA ARCE

Nombres: MATEO

Número de Libreta ó DNI: 88/23

42.910.872

Turno: PRÁCTICA TARDE

Carrera: COMPU.

resuelto en 4 hojas

| 1 | 2 | 3 | 4 | Nota |
|---|---|---|---|---|
| B⁻ | R | B/R | B⁻ | $6^{75}$ (seis $^{75}$) |

**Usar hojas distintas para ejercicios distintos. Exhibir todos los cálculos. Justificar todas las respuestas. Escribir con tinta y con letra clara y legible.**

**No se aceptan preguntas: la interpretación de los enunciados es parte del examen.**

Ejercicio 1. Hallar todos los pares $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{Z}^2$ que cumplen simultáneamente

$$819\,\mathbf{a} + 1071\,\mathbf{b} = 63 \text{ y } (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^{2022} \equiv 26 \pmod{11}.$$

Ejercicio 2. Sea $w = e^{\frac{2}{65}\pi i}$. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$w^{7n+184} = \sum_{k=30}^{680} w^k$$

Ejercicio 3. a) Hallar todos los posibles $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{c} > 0$ tales que

$$f = X^6 - 4X^5 + 5X^4 - 12X^3 + 4X^2 + 40X + \mathbf{c}$$

tenga una raíz de argumento $\dfrac{3\pi}{2}$.

b) Para cada valor de $\mathbf{c}$ hallado, factorizar $f$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que tiene al menos una raíz doble.

Ejercicio 4. Determinar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$(n^{433} + 7n + 91 : 931) = 133.$$

Expresar las soluciones mediante una única ecuación.

OTAZUA ARCE, MATEO (88/23)

## CICLO 1

Debo hallar todo par $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ que cumplan simultáneamente:

$$① \quad 819a + 1071b = 63 \qquad y \qquad ② \quad (a+2b)^{2022} \equiv 26 \ (11)$$

---

$819 = 7 \cdot 13 \cdot 9 \quad 1071 = 7 \cdot 17 \cdot 9$ ✓

Empiezo analizando ①. $(819 : 1071) = 7 \cdot 9 = 63$ ✓ Divido todo por 63.

$$13a + 17b = 1$$

Las soluciones serán de la forma $(a_0 + a_T, b_0 + b_T)$, Siendo $(a_0, b_0)$ solución particular y $(a_T, b_T)$ solución de $13a + 17b = 0$ ✓

A ojo hallo $(a_0, b_0) = (4, -3)$. ok

A ojo hallo $(a_T, b_T) = (17k, -13k) \ \forall k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{(a,b) = (4 + 17k, -3 - 13k)}$$

lo vimos en clase, esto no es a ojo, es por divisibilidad.

Ahora analizo ②. Si $11 \mid a + 2b \to 0 \equiv 4 \ (11)$, ABSURDO. ✓ Por ende, $11 \nmid a + 2b$.

Aplico PTF: ok $(a+2b)^2 \equiv 4 \ (11)$ ~~⇒~~ Hago tabla de restos para $n^2$ (mod 11).

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 5 | 3 | 3 | 5 | 9 | 4 | 1 |

Se debe cumplir:

$$\boxed{\begin{array}{l} a + 2b \equiv 2 \ (11) \\ \text{o} \\ a + 2b \equiv 9 \ (11) \end{array}}$$

o bien $11 \mid (a+2b)^2 - 4 = (a+2b+2)(a+2b-2)$ diferencia de cuadrados

Ahora junto ① y ②, separando por casos de ②:

**Si $a + 2b \equiv 2 \ (11)$**

$4 + 17k + 2(-3 - 13k) \equiv 2 \ (11)$

$4 + 17k - 6 - 26k \equiv 2 \ (11)$

$-9k \equiv 4 \ (11)$

$2k \equiv 4 \ (11)$

porque $(2:11) = 1$.

$\boxed{k \equiv 2 \ (11)}$

ojo, en general no vale dividir: $8 \equiv 2 (6)$ pero $4 \not\equiv 1 (6)$.

$k = 11j + 2$

**Si $a + 2b \equiv 9 \ (11)$**

$4 + 17k + 2(-3 - 13k) \equiv 9 \ (11)$

$-9k \equiv 0 \ (11)$

porque 11 es primo y $(11:9) = 1$ (en realidad, esto último alcanza). Pero ojo, lo mismo que en la otra ecuación.

$\boxed{k \equiv 0 \ (11)}$ $\quad k = 11j$

**Rta**: $(a,b) = (4 + 17k, -3 - 13k)$

~~con $k \equiv \{$~~ con $k \equiv 2 \ (11)$ o $k \equiv 0 \ (11)$

Ok, podías dejarlo "sin congruencia" poniendo $k = 11j + 2 \rightsquigarrow (a,b) = (4 + 17(11j+2), -3 - 13(11j$ y lo mismo en el otro caso.

OTAZUA ARCE, MATEO (88/23)

## jercicio 2

Debo hallar todo $n \in \mathbb{N}$ tal que con $w = e^{\frac{2}{65}\pi i}$

$$w^{7n+184} = \sum_{k=30}^{680} w^k$$

---

Reconozco que $\boxed{w = w_1 \in G_{65}}$ $\cancel{G_{13} \cup G_5 \subseteq G_{65}}$.

$w^{7n+184} = w_k$ con $k = r_{65}(7n+184)$ ok

~~Calculo $r_{65}(7n+184)$ con congruencias~~

$\cancel{7n+184 \equiv k\ (65)}$

$\cancel{\begin{cases} 7n+184 \equiv k\ (5) \\ 7n+184 \equiv k\ (13) \end{cases}}$

Despliego

$$\sum_{k=30}^{680} w^k = \sum_{k=30}^{64} w^k + \underbrace{\sum_{k=65}^{129} w^k + \sum_{k=130}^{194} w^k + \sum_{k=195}^{259} w^k + \sum_{k=260}^{324} w^k + \sum_{k=325}^{389} w^k + \sum_{k=390}^{454} w^k + \sum_{k=455}^{519} w^k + \sum_{k=520}^{584} w^k + \sum_{k=585}^{649} w^k}_{\text{todos estos } = 0} + \sum_{k=650}^{680} w^k$$

¿Por qué?

$$= \sum_{k=30}^{64} w^k + \underbrace{\sum_{k=650}^{680} w^k}$$

$$= \sum_{k=30}^{64} w^k + \sum_{k=0}^{30} w^k$$

¿Por qué?

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{64} w^k}_{=0} + w^{30}$$

¿Por qué?

$$\sum_{k=30}^{680} w^k = w^{30}$$

Debo hallar todo $n \in \mathbb{N}$ que cumpla

$$w^{7n+184} = w^{30} \quad \text{con } w = w_1 \in G_{65}$$

Basta con buscar ¿Por qué basta con esto?

$$7n + 184 \equiv 30\ (65)$$

$7n \equiv -24\ (65)$

$-2n \equiv 44\ (65)$ ¿Cómo pasaste de uno a otro?

$\boxed{n \equiv 43\ (65)}$

Los $n$ que cumplen con la consigna son $n \equiv 43\ (65)$

OTAZUA ARCE, MATEO (88/23)

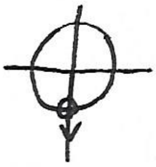
## jercicio 3

ⓐ Debo hallar todo $c \in \mathbb{R}$, $c>0$ tal que
$f = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 40x + c$
tenga una raíz de argumento $(\frac{3}{2}\pi)$

ⓑ del otro lado →

---

Llamo $z$ a la raíz de argumento $(\frac{3}{2}\pi)$



Todo número complejo de argumento $(\frac{3}{2}\pi)$ cumple con la forma

$$\boxed{z = -|z|\,i}$$ ok

Analizo $f_{(z)} = 0$

$$f_{(z)} = (-|z|i)^6 - 4(-|z|i)^5 + 5(-|z|i)^4 - 12(-|z|i)^3 + 4(-|z|i)^2 + 40(-|z|i) + c$$

$$f_{(z)} = -|z|^6 + 4|z|^5 i + 5|z|^4 - 12|z|^3 i - 4|z|^2 - 40|z|\,i + c$$

Despejo $c$ y saco factor común $i$

$$c = \underbrace{|z|^6 - 5|z|^4 + 4|z|^2}_{Re(c)} + i\underbrace{\left(-4|z|^5 + 12|z|^3 + 40|z|\right)}_{Im(c)}$$

Como $c \in \mathbb{R}$, $Im(c) = 0$ ①

Como $c > 0$, $Re(c) > 0$ ②

Veo ①: $-4|z|^5 + 12|z|^3 + 40|z| = 0$

$|z|\left(-|z|^4 + 3|z|^2 + 10\right) = 0$ ↗ $|z| = 0$ cumple ①, pero no ②

BASKHARA con $|z|^2$ de incógnita

$$\frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{-2} \begin{cases} |z|^2 = -2, \ |z| = \sqrt{2}\,i \ \text{ABSURDO} \\ |z|^2 = 5 \rightarrow |z| = \sqrt{5} \end{cases}$$

Veo si $|z| = \sqrt{5}$ cumple ②

$|z|^6 - 5|z|^4 + 4|z|^2 > 0$

$125 - 125 + 20 > 0$

$20 > 0$ ~~$270 > 0$~~

$c = 20$ ~~$c = 270$~~

Veo si $|z|^2 = -2$ cumple ②

↳ Es un módulo (al cuadrado, más aún), no puede ser negativo.

$-8 + 16 - 8 > 0$

$-32 > 0$ ABSURDO

El único $c \in \mathbb{R}$ que cumple la consigna es **20** (veinte)

⑥ Debo factorizar en $\mathbb{Q}[x]$, en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$

$f = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 40x + 20$

---

Sé que existe raíz doble por consigna.

Sé que $-\sqrt{5}i$ es raíz, y ~~sé~~ que su conjugado también. ¿Por qué?

$(x-\sqrt{5}i)(x+\sqrt{5}i) = (x^2+5)$

Divido $f \,\lfloor x^2+5$

$$
\begin{array}{l|l}
x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 40x + 20 & x^2+5 \\
\hline
-\ \ x^6 \quad + 5x^4 & x^4 - 4x^3 + 8x + 4 \\
\quad -4x^5 \quad - 12x^3 + 4x^2 + 40x + 20 & \\
-\ \ -4x^5 \quad -20x^3 & \\
\quad\quad 8x^3 + 4x^2 + 40x + 20 & \\
-\ \ \ \ 8x^3 \quad + 40x & \\
\quad\quad\quad 4x^2 \quad + 20 & \\
-\ \ \ \ \ 4x^2 \quad + 20 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad \cancel{250}\ 0 &
\end{array}
$$

ALGO HICE MAL

solucionado, perdón desprolijidad

OK

$f = (x^2+5)\underbrace{(x^4 - 4x^3 + 8x + 4)}_{g}$

busco raíz doble en $g' = 4x^3 - 12x^2 + 8 = 0$

$x^3 - 3x^2 + 2 = 0$

por LEMA de GAUSS pruebo $\pm 1$ y $\pm 2$

$+1$ es raíz, divido

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 3x^2 + 2 & x-1 \\
\hline
-\ x^3 - x^2 & x^2 - 2x - 2 \\
\quad -2x^2 + 2 & \\
-\ -2x^2 + 2x & \\
\quad\quad -2x + 2 & \\
-\ \ -2x + 2 & \\
\quad\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

BASKHARA

$\dfrac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2}$ $\begin{cases} x = 1+\sqrt{3} \\ x = 1-\sqrt{3} \end{cases}$

posibles raíces multiples:

$\{1;\ 1+\sqrt{3};\ 1-\sqrt{3}\}$

1 no es raíz de $g$ ✓

Si $1+\sqrt{3}$ es raíz, $1-\sqrt{3}$ es raíz ¿Por qué?

y como $f$ tiene raíz doble y

debe ser una de ellas, entonces

ambas son raíces dobles ¿Por qué?

~~$(1+\sqrt{3})(1$~~

$(x-1+\sqrt{3})(x-1-\sqrt{3}) = (x-1)^2 - 3 = x^2 - 2x - 2$

$f = (x^2+5)(x^2-2x-2)^2$ en $\mathbb{Q}[x]$

$f = (x^2+5)(x-1+\sqrt{3})^2(x-1-\sqrt{3})^2$ en $\mathbb{R}[x]$

¿Por qué son irreducibles?

$f = (x-\sqrt{5}i)(x+\sqrt{5}i)(x-1+\sqrt{3})^2(x-1-\sqrt{3})^2$ en $\mathbb{C}[x]$

OTAZUA ARCE, MATEO (88/23)

## ercicio 4

Debo hallar todo $n \in \mathbb{Z}$ tal que: $(n^{433}+7n+91 : 931) = 133$

---

Empiezo viendo $931 = 19.7^2$, $133 = 19.7$. Sabemos que $(a : bx) = b \leftrightarrow b|a$ y $x \nmid a$.

no vale este si y solo si: $(\underset{a}{6} : \underset{b}{6}.\underset{x}{2}) = \underset{b}{6}$, $\underset{b}{6}|\underset{a}{6}$ y $\underset{x}{2}|\underset{a}{6}$

$$\begin{cases} 19 \mid n^{433}+7n+91 & \rightsquigarrow n^{433}+7n \equiv 4\ (19) \quad ① \\ 7 \mid n^{433}+7n+91 & \rightsquigarrow n \equiv 0\ (7) \quad ② \\ 7^2 \nmid n^{433}+7n+91 & ③ \end{cases}$$

¿Por qué?

Analizo ③ usando ②. $7^2 \nmid \underbrace{n^{433}}_{n^2 \equiv 0 (7^2)} + \underbrace{7n}_{\text{como } n\equiv 0 (7),\ 7n \equiv 0 (7^2)} + 91 \rightsquigarrow 7^2 \nmid 91$ se cumple ~~$\forall n \in \mathbb{Z}$~~ siempre (siempre que se cumpla ②)

OK

~~Analizo ① usando ②. Veo que $n \equiv$~~

Simplifico el sistema

~~$n^{433}+7n \equiv$~~

$$\begin{cases} n^{433}+7n \equiv 4\ (19) \\ n \equiv 0\ (7) \end{cases}$$

$$\boxed{n = 7k \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}}$$

busco k en la primera

$$(7k)^{433} + 7.7k \equiv 4\ (19)$$

$19 \nmid 7$, PTF PTF te dice $7^{18} \equiv 1 (19)$, ¿por qué podemos pasar de $7^{433}$ a $7$?

$$7k^{433} + 11k \equiv 4\ (19)$$

Si $19|k$, $0 \equiv 4\ (19)$, ABSURDO

por ende, $19 \nmid k$, aplico PTF lo mismo que antes. Falta justificar.

$$18k \equiv 4\ (19) \rightsquigarrow -k \equiv 4\ (19)$$

~~$\boxed{k \equiv 5\ (19)}$~~ $\boxed{k \equiv 15\ (19)}$

~~$k = 19j+5$~~ $k = 19j + 15$

~~$n = 7(19j+5)$~~ $n = 7(19j+15)$

~~$\boxed{n = 133j+35}$~~ $\boxed{n = 133j+105}$

Rta: todos los $n$ de forma $\boxed{n = 133j + 105}$ con $j \in \mathbb{Z}$ cumplen con la consigna, y ninguno por fuera de estos.