06/07/2021

SEGUNDO PARCIAL ÁLGEBRA I

MARÍA MARINO, LU: 450/21, CARRERA: LIC. EN CIENCIA DE DATOS, TURNO: 1 (mañana)

① n = cantidad de Knuts $\in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} n \leq 1070 \\ 2n = 9\cdot(\text{bolsas de gragea}) + 6 \\ 13n = 17\cdot(\text{ranas de chocolate}) + 5 \\ 5n = 21\cdot(\text{varitas de regaliz}) + 18 \end{cases} \iff \begin{cases} 2n \equiv 6\ (9) \\ 13n \equiv 5\ (17) \\ 5n \equiv 18\ (21) \end{cases} \rightarrow$$ Los módulos NO son coprimos dos a dos.

$$\begin{cases} 2n \equiv 0\ (3) \\ 2n \equiv 6\ (9) \\ 13n \equiv 5\ (17) \\ 5n \equiv 0\ (3) \\ 5n \equiv 4\ (7) \end{cases}$$

Como los módulos son coprimos con el coeficiente que acompaña a la incógnita busco los inversos multiplicativos para analizar si es compatible

$2.5n \equiv n \equiv 5.0\ (3)$
$5.2n \equiv n \equiv 2.0\ (3)$
$2.5n \equiv n \equiv 6.5 \equiv 3\ (9)$
$13.4n \equiv n \equiv 4.5 \equiv 3\ (17)$
$5.3n \equiv n \equiv 4.3 \equiv 5\ (7)$

$$\begin{cases} n \equiv 0 (3) \\ n \equiv 3\ (9) \\ n \equiv 3\ (17) \\ n \equiv 5\ (7) \end{cases} \iff \begin{cases} n \equiv 3\ (9) \\ n \equiv 3\ (17) \\ n \equiv 5\ (7) \end{cases}$$

Obs: los módulos son coprimos dos a dos entonces por el Teorema Chino del Resto existen soluciones al sistema.

$n \equiv 3\ (9) \iff n = 17K + 3$ con $K \in \mathbb{Z}$

$17K + 3 \equiv 3\ (9) \iff -K \equiv 0\ (9) \iff K \equiv 0\ (9)$

$K \equiv 0\ (9) \iff K = 9q$ con $q \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 17(9q) + 3 = 153q + 3$

$153q + 3 \equiv 5\ (7) \iff -q \equiv 2\ (7) \iff q \equiv 5\ (7)$

$q \equiv 5\ (7) \iff q = 7l + 5$ con $l \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 153(7l + 5) + 3 = 1071l + 768$

$\Rightarrow n \equiv 768\ (1071)$

Por la primera condición del enunciado $n \leq 1070$

$$\begin{cases} n \leq 1070 \\ n \equiv 768\ (1071) \end{cases} \iff \boxed{n = 768}$$

$\downarrow$

Por el Algoritmo de división, si $n = m.d + r$, m y r, el cociente y el resto son únicos. Y como n es menor al divisor $n = 0.d + n = n$.

HOJA 2

(2) p primo $\in \mathbb{N}$ tal que $p \mid 5^{p-1} + 3^{p+2} + 833$

- Como voy a querer aplicar Fermat para reducir los exponentes primero verifico los casos en los que p es un divisor de las bases de dichos exponentes.

Obs: $833 = 7^2 . 17$

- Caso $p = 5$

$5 \mid 5^4 + 3^7 + 833 \iff 5^4 + 3^7 + 833 \overset{?}{\equiv} 0 \ (5)$

$5^4 + 3^7 + 833 \equiv 0 + 3^{r_4(7)} + 833 \equiv 3^3 + 833 \equiv 0 \ (5) \rightarrow p = 5$ vale

$\hookrightarrow 5 \nmid 3$ Peq. T. Fermat

- Caso $p = 3$

$3 \mid 5^2 + 3^5 + 833 \iff 5^2 + 3^5 + 833 \overset{?}{\equiv} 0 \ (3)$

$5^2 + 3^5 + 833 \equiv 25 + 833 \equiv 0 \ (3) \rightarrow p = 3$ vale

- Caso general p primo $\in \mathbb{N} - \{3, 5\}$

$p \mid 5^{p-1} + 3^{p+2} + 833 \iff 5^{p-1} + 3^{p+2} + 833 \overset{?}{\equiv} 0 \ (p)$

$5^{p-1} + 3^{p+2} + 833 = 5^{p-1} + 3^{p+2} + 7^2 . 17$

Como $p \nmid 5$ y $p \nmid 3$, puedo aplicar el Pequeño Teorema de Fermat

$5^{p-1} \equiv 5^{r_{p-1}(p-1)} \ (p)$ y $p-1 \equiv 0 \ (p-1) \Rightarrow 5^{p-1} \equiv 1 \ (p)$

$3^{p+2} \equiv 3^{r_{p-1}(p+2)} \ (p) \quad p+2 = 1.(p-1) + 3 \iff r_{(p-1)}(p+2) = 3 \iff p \neq 2$

$r_{(p-1)}(p+2) = 0 \iff p = 2$

- Caso $p = 2$

$5^{p-1} + 3^{p+2} + 833 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 3 \not\equiv 0 \ (p) \rightarrow p \neq 2$

- Caso $p \neq 2$

$5^{p-1} + 3^{p+2} + 833 \equiv 1 + 3^3 + 833 \equiv 861 \ (p)$

$861 = 3 . 7 . 41 \Rightarrow 861 \equiv 0 \ (p) \iff p \in \{3, 7, 41\}$

Todos los primos $\in \mathbb{N}$ que satifacen el enunciado son

3, 5, 7 y 41.

HOJA 3

(3) $f = x^{68} - 17x^4 - 16 \in \mathbb{C}[x]$

Como quiero conocer sus raíces MULTIPLES EMPIEZO buscando las raíces de su derivada ya que si

$\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $mult(\alpha; f) = k > 1 \iff \overbrace{(x-\alpha)^{k-1} \mid f'}^{\iff f'(\alpha)=0}$ $(k-1>0)$

$f' = 68x^{67} - 68x^3 = 68(x^{67} - x^3) = 0 \iff x^{67} - x^3 = 0$

Obs: $x = 0$ es raíz de f' pero no de f. De ahora en más asumo $x \neq 0$

$x^{67} - x^3 = 0 \iff x^{67} = x^3 \underset{x \neq 0}{\iff} \frac{x^{67}}{x^3} = 1 \iff x^{64} = 1 \iff x \in G_{64}$

Ahora verifico qué $x \in G_{64}$ son raíces de f. Tomo $z \in G_{64}$

$f(z) = z^{68} - 17z^4 - 16 = z^{64} \cdot z^4 - 17z^4 - 16 \underset{z \in G_{64} \iff z^{64}=1}{=} -16z^4 - 16$

$= (-16)(z^4 + 1) = 0 \iff z^4 = -1 \underset{\text{Moivre}}{\iff} z = \sqrt[4]{1} \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)i}$ con $0 \leq k < 4$

$\Rightarrow z = \{\underbrace{\sqrt[4]{1}e^{\frac{\pi}{4}i}}_{z_1}, \underbrace{\sqrt[4]{1}e^{\frac{3}{4}\pi}}_{z_2}, \underbrace{\sqrt[4]{1}e^{\frac{5}{4}\pi}}_{z_3}, \underbrace{\sqrt[4]{1}e^{\frac{7}{4}\pi}}_{z_4}\}$

$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)i = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)i = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_3 = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)i = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_4 = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)i = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Obs: Tomé como módulo $\sqrt[4]{1} = 1$ (la única solución real positiva) para que cumpla las condiciones de módulo de número complejo.

* Resta verificar que los z hallados pertenecen a G_{64}

(4) $f = x^5 + x^4 - ax^3 + 2x^2 - 8$

a) $a \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 - a \mid f$

$$\begin{array}{l|l}
x^5 + x^4 - ax^3 + 2x^2 - 8 & x^2 - a \\
\underline{-[x^5 - x^3 \cdot a]} & x^3 + x^2 + (2+a) \\
\quad x^4 + 2x^2 - 8 & \\
\quad \underline{-[x^4 - ax^2]} & \\
\quad (2+a)x^2 - 8 & \\
\quad \underline{-[(2+a)x^2 - a(2+a)]} & \\
\quad a(2+a) - 8 & \\
\quad \quad r &
\end{array}$$

$\Rightarrow a(2+a) - 8 = a^2 + 2a - 8$

HOJA 4

$r_{(x^2-a)}(f) = a^2 + 2a - 8 = 0 \iff a = \frac{-2+\sqrt{36}}{2} = 2$ ó $a = \frac{-2-\sqrt{36}}{2} = -4$

$\Rightarrow \{a \in \mathbb{Q} / (x^2-a) \mid f\} = \{2, -4\}$ ✓

b) Para máx $\{a \in \mathbb{Q} / (x^2-a) \mid f\}$ factorizar f en $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$

$f = x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 8$

- Lema de Gauss: Posibles divisores $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$

$f(1) \neq 0$; $f(-1) \neq 0$; $f(2) \neq 0$; $f(-2) = 0$; $f(-4) \neq 0$

$f(4) \neq 0$; $f(-8) \neq 0$; $f(8) \neq 0$.

$\Rightarrow -2$ es raíz de $f \iff (x+2) \mid f$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 8 & x+2 \\
-[x^5 + 2x^4] & \overline{x^4 - x^3 + 2x - 4} \\
\quad -x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 8 & \\
\quad -[-x^4 - 2x^3] & \\
\qquad 2x^2 - 8 & \\
\qquad -[2x^2 + 4x] & \\
\qquad\quad -4x - 8 & \\
\qquad\quad -[-4x - 8] & \\
\qquad\qquad 0 & \\
\qquad\qquad r &
\end{array}
$$

Mal

$\Rightarrow f = (x+2)(x^4 - x^3 + 2x - 4)$

ESTA ES LA FACTORIZACIÓN DE f EN $\mathbb{Q}$ YA QUE POR EL LEMA DE GAUSS NO EXISTEN OTRAS RAÍCES RACIONALES.

- factorizo $x^4 - x^3 + 2x + 4$

$x^4 - x^3 + 2x - 4$ no es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$

Por el item a $(x^2-2) \mid f \Rightarrow (x^2-2) \mid (x^4 - x^3 + 2x - 4)$

$(x+2)$ es irreducible en $\mathbb{C}[x]$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - x^3 + 2x - 4 & x^2 - 2 \\
-[x^4 - 2x^2] & \overline{x^2 - x + 2} \\
\quad -x^3 - 2x^2 - 2x - 4 & \\
\quad -[-x^3 - 2x] & \\
\qquad -2x^2 - 4 & \\
\qquad -[-2x^2 - 4] & \\
\qquad\quad 0 & \\
\qquad\quad r &
\end{array}
$$

$\Rightarrow f = \underbrace{(x^2-2)}_{q(x)}(x+2)\underbrace{(x^2-x+2)}_{t(x)}$

$\Delta q(x) = (-4)\cdot(-2) = 8 \Rightarrow$ Sus raíces son

$x_1 = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$ y $x_2 = \frac{-\sqrt{8}}{2} = -\sqrt{2}$

HOJA 5

$q(x) = x^2 - 2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \Rightarrow f = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+2)\underbrace{(x^2-x+2)}_{t(x)}$

$\Delta t(x) = 1 - 8 = -7 < 0 \iff t$ NO tiene raíces reales

$\iff t$ es irreducible en $\mathbb{R}[x]$

$\downarrow$

$gr(t) = 2$

Factorización en $\mathbb{R}[x]$: $f = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+2)(x^2-x+2)$

- Factorizo $t(x)$: $x^2 - x + 2$

  - Raíces: $\alpha_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i$

Factorización en $\mathbb{C}[x]$:

$f = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+2)\left(x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i\right)\right)\left(x - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i\right)\right)$

Como todos los polinomios que son irreducibles en $\mathbb{C}[x]$ son de grado 1 puedo afirmar

→ EJ. 3

(*) Me faltaba describir la multiplicidad de las raíces encontradas

- Verifico que las raíces halladas $\in G_{64}$

$z \in G_{64} \iff z^{64} = 1$

$(z_1)^{64} = e^{\frac{64}{4}\pi i} = e^{16\pi i} = e^{2\pi i} = 1$; $(z_2)^{64} = e^{80\pi i} = e^{2\pi i} = 1$

Unicidad del argumento de z

$(z_2)^{64} = e^{48\pi i} = e^{2\pi i} = 1$; $(z_4)^{64} = e^{112\pi i} = e^{2\pi i} = 1$

- Describo la multiplicidad de las raíces encontradas derivando f' y evaluando en las mismas

$f'' = \underbrace{4557}_{68.67} x^{66} - 68.3x^2 = 68(67x^{66} - 3x^2) = 0 \iff 67x^{66} - 3x^2 = 0$

- Recuerdo que $x = 0$ NO es raíz de f.

$f''(z_k) = (67 z_k^{66} - 3z_k^2) 68 = 68(67 . z_k^{64} . z_k^2 - 3z_k^2) = 68(z_k^2(67-3))$

$1 \leq k \leq 4$

$$f''(z_k) = 68\left[z_k^2\,(67-3)\right] = 0 \iff z_k^2 = 0 \iff z_k = 0$$

Como ningún z_k es cero y cero NO es raíz de f concluyo que las cuatro raíces múltiples encontradas son dobles.