1	2	3	4	5	Calificación

$c \neq 0$

APELLIDO Y NOMBRE:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

$c.e^x = \int_0^x c.\,e^t dt \Big|_{e^0}^{e^x} = e^x - 1$

ANALISIS I

Examen Final- 1/3/2011

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface que:

   HACER DE NUEVO

$$f(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

$f(x) = c\, e^x$

Probar que f es idénticamente cero.
Sugerencia: considerar la función $g(x) = f(x)e^{-x}$

$f'(x) = f(x)$

2. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Probar que para cada $v \in \mathbb{R}^2$ con $\|v\| = 1$ existe la derivada direccional $\frac{\partial F}{\partial v}(0,0)$ y calcularla.
   b) ¿Es F diferenciable en $(0,0)$?

3. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
   i) "Sea $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f'(x)$ es identicamente nula. Entonces f es constante".
   ii) "Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Si f tiene un mínimo local en $(1,3)$ entonces la matriz $Hf(1,3)$ es definida positiva."
   iii) "Sea $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y además $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Entonces f está acotada superiormente en $[1, +\infty)$."

4. Sea $u : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Consideramos la función $v : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$v(x,y) = u\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

   Encontrar una expresión para el Laplaciano de v (definido como $\Delta v = v_{xx} + v_{yy}$), en la que aparezcan las derivadas de u hasta el orden 2.

5. Calcular la integral $\int\int_R (x-y)^2 dxdy$, donde R es el paralelogramo con vértices $(0,0), (1,1), (2,0)$ y $(1,-1)$ aplicando el cambio de variables $u = x - y, v = x + y$.

Justifique todas sus respuestas.

$\boxed{1/3/4}$

② $F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$

$\forall v : \|v\| = 1 \Rightarrow \exists \frac{\partial F}{\partial v}(0,0)$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(hv_1, hv_2) - F(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h} v_1 h^2 v_2^2}{\cancel{h}(h^2 v_1^2 + h^2 v_2^2)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h^2} v_1 v_2^2}{h \cdot \cancel{h}(v_1^2+v_2^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{v_1 v_2^2}{\cancel{h}(v_1^2+v_2^2)} = \boxed{\frac{v_1 v_2^2}{v_1^2+v_2^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y) - \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)\cdot x - \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\, y - F(0,0)}{\|(x,y)-(0,0)\|}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \cdot y^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = (t,t)$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^3}{2t^2 \cdot \sqrt{2}\cdot |t|} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{2\sqrt{2}\,|t|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

④ $u: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2$ $\qquad v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad$ hallar $v_{xx} + v_{yy}$. $\qquad$ 1/3/11

$v(x,y) = u(\sqrt{x^2+y^2})$

$$D_v(x,y) = D_u(\sqrt{x^2+y^2}) = D_u(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot D_{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$$

$$= u'(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \left(\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2} \cdot 2x \;,\; \tfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2} \cdot 2y\right)$$

$$\Rightarrow \quad = \Bigg(\underbrace{\frac{u'(\sqrt{x^2+y^2})\,x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{V_x} \;,\; \underbrace{\frac{u'(\sqrt{x^2+y^2})\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{V_y}\Bigg)$$

Arriba - Abajo

$$V_{xx} = \frac{\left(u''(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot x + u'(\sqrt{x^2+y^2})\right) \cdot \sqrt{x^2+y^2} - u'(\sqrt{x^2+y^2})\, x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{u''(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot x^2 + u'(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \sqrt{x^2+y^2} - \frac{u'(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{u''(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot x^2 + u'(\sqrt{x^2+y^2}) \left(\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{u''(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot x^2 + u'(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \left(\frac{\cancel{x^2} + y^2 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{u''(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot x^2 \cdot \sqrt{x^2+y^2} + u'(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

ESPACIO AL PEEEEDO

1|3|1|1

$$V_y = \left(\frac{u'(\sqrt{\ })\cdot y}{\sqrt{\ }} \right)$$

$$V_{yy} = \frac{\left(u''(\sqrt{x^2+y^2})\cdot\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + u'(\sqrt{x^2+y^2})\right)\sqrt{x^2-y^2} - u'(\sqrt{x^2+y^2})\cdot y\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$\Rightarrow V_{yy} + V_{xx} =$

$$= \frac{u''x^2(\sqrt{\ }) + u'y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{u''y^2(\sqrt{\ }) + u'x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{u''x^2\sqrt{\ } + u'(x^2+y^2) + u''y^2(\sqrt{\ })}{(x^2+y^2)\sqrt{\ }}$$

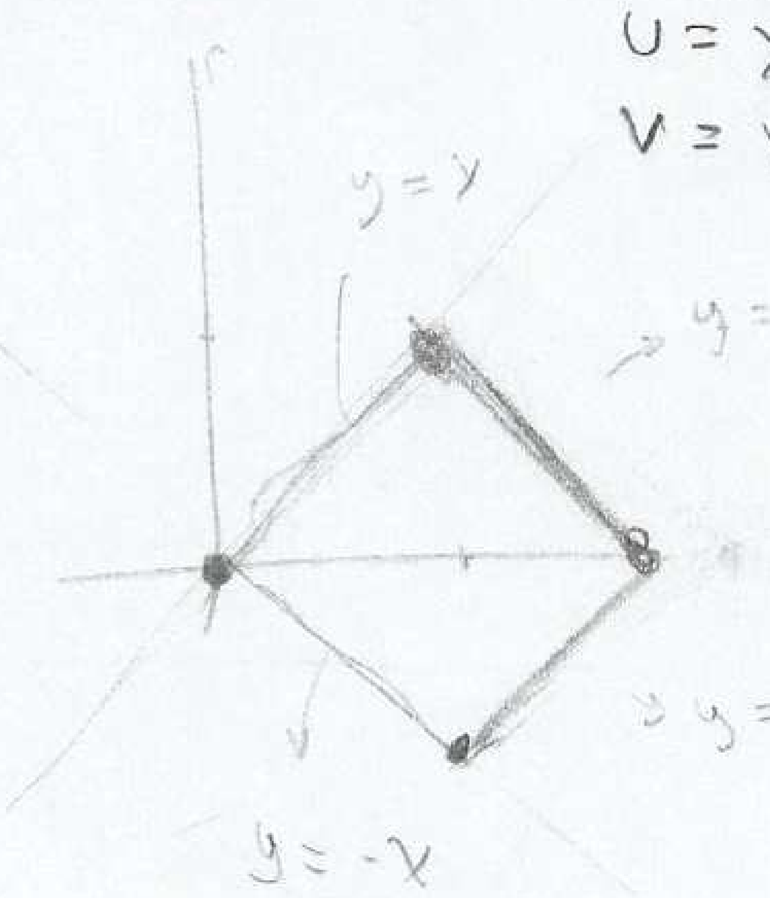
$$= \frac{u'(x^2+y^2) + u''\sqrt{\ }(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{\ }} = \frac{u' + u''\sqrt{\ }}{\sqrt{\ }}$$

$$= \frac{u''(\sqrt{x^2+y^2})\cdot\sqrt{x^2+y^2} + u'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$|x,y| < \delta$

$u = x - y$

$v = x + y$



5)

$$\iint_R (x-y)^2\, dx\, dy \quad \Rightarrow R^* = \{(u,v) \,/\, 0 \le u, v \le 2\}$$

$y = x \Rightarrow u = 0$

$y = -x \Rightarrow v = 0$

$y = -x+2 \Rightarrow v = 2$

$y = x-2 \Rightarrow u = 2$

$u + y = x$

$v = u + y + y$

$\frac{v-u}{2} = y$

$y = v - x$

$u = x - (v-x)$

$u = x - v + x$

$\frac{u+v}{2} = x$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$= \int_0^2\int_0^2 \frac{u^2}{2}\, du\, dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left.\frac{u^3}{3}\right|_{u=0}^{u=2} dv$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - \frac{0^3}{3}\right)\cdot(2-0) = \boxed{\frac{8}{3}}$$

1 Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

Probar que $f = 0$. Sugerencia, considerar $g(x) = f(x).e^{-x}$

$\boxed{1/03/11}$

Como $f(x) = \int_0^x f(t)\,dt \Rightarrow f(x) = f'(x)$.

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

$$f(x).e^{-x} = e^{-x}.\int_0^x f(t)\,dt$$

$$f(x).e^{-x} = \int_0^x f(t).e^{-x}\,dt$$

$f: \int_0^x$

$$(f(x).e^{-x})' = \left(\int_0^x f(t).e^{-x}\,dt\right)'$$

chain rule

$$-f(x).e^{-x} + f'(x).e^{-x} = f(x).e^{-x} \cdot f(x).-e^{-x}$$

$$\cancel{e^{-x}}\,(\underbrace{f(x) - f(x)}_{0}) = -\cancel{e^{-x}}\; e^{-x}.\,f^2(x)$$

$$0 = e^{-x}.\,f^2(x) \Longleftrightarrow \boxed{f(x) = 0}$$