Probabilidad y Estadística   Primer Parcial   Verano 2016

Nombre y apellido.. Número de libreta..

Por favor, al finalizar el examen señalar claramente aquí qué ejercicios se entregan.

Entrego ejercicios 1 2 3 4

(Reservado para el corrector):

1	2	3	4	Nota
19	20	22	18	79

A

Por favor, resolver cada ejercicio en hojas separadas. Numerar todas las hojas y colocar en cada una nombre y apellido.

Para aprobar es necesario tener al menos 60 puntos. Justificar todas las respuestas.

Ej 1. (20 p.) Para un experimento aleatorio se cuenta con un dado equilibrado y dos urnas: la urna A contiene 7 bolitas negras y 3 rojas; y la urna B contiene 2 bolitas negras y 3 rojas.

El experimento comienza arrojando el dado: si sale el uno, se extraen al azar, sucesivamente y sin repetición, dos bolitas de la urna B; pero si sale cualquier otro número, se extraen al azar dos bolitas de la urna A que se colocan en la urna B y finalmente se extrae una bolita al azar de la urna B.

(a) (5 p.) Calcular la probabilidad de que el experimento resulte en la extracción de 3 bolitas negras.

(b) (5 p.) Hallar la probabilidad de que la última bolita extraída sea roja si se sabe que no salió el uno en el dado.

(c) (5 p.) Calcular la probabilidad de que la última bolita extraída sea negra.

(d) (5 p.) Si se sabe que la última bolita extraída fue roja, hallar la probabilidad de que haya salido un uno en el dado.

Ej 2. (25 p.) La única cajera del pequeño Banco Mar atiende la caja desde las 10 h hasta las 15 h, con un descanso entre las 12.30 h y las 13.30 h (durante el cual la caja queda a cargo del dueño del banco). Supongamos que la cantidad de clientes que llegan a la caja entre las 10 h y las 15 h sigue un proceso de Poisson con una media de 6 clientes por hora.

(a) (6 p.) Hallar la probabilidad de que lleguen al menos 3 clientes durante el intervalo del mediodía.

(b) (6 p.) Si la cajera entra a trabajar 15 minutos tarde (es decir, a las 10.15 h), ¿cuál es la probabilidad de que al menos un cliente haya llegado a la caja antes que ella?

(c) (6 p.) Si la cajera llega 15 minutos tarde al trabajo los 5 días hábiles de una determinada semana, ¿cuál es la probabilidad de que en exactamente 2 de esos días no llegue ningún cliente antes que ella?

(d) (7 p.) Determinar cuán tarde, como máximo, puede entrar a trabajar la cajera si quiere que la probabilidad de que no llegue ningún cliente antes de su entrada sea al menos 1/2.

Ej 3. (30 p.) Un cierto sistema de alarma consta apenas de dos componentes, cuyas respectivas vidas útiles son variables aleatorias independientes que se distribuyen de forma notoriamente distinta. El tiempo T_1 (en años) que transcurre hasta que el componente C1 falla es una variable aleatoria con distribución $\mathcal{E}(\lambda)$, mientras que el tiempo T_2 (también en años) que transcurre hasta que el componente C2 falla puede aproximarse mediante una distribución $N(4, \sigma^2)$. Se sabe además que $E(T_1^3) = 48$ y que $P(2,8 < T_2 < 5,2) = 0,9836$.

(a) (8 p.) Hallar los valores de los parámetros λ y σ^2.

(b) (8 p.) Si C1 lleva 5 años funcionando sin fallas, calcular la probabilidad de que continúe así por al menos otros cinco años. Repetir para C2.

(c) (8 p.) Teniendo en cuenta que el sistema falla en cuanto falla uno de los dos componentes, hallar una expresión de la densidad de la variable T, que representa el tiempo transcurrido hasta que el sistema falla por primera vez. *(Se puede representar por $\Phi(t)$ la función de distribución de la $N(0,1)$).*

(d) (6 p.) Sabiendo que $E(T) = 1,89$ y $Var(T) = 1,28$, dar una cota inferior para $P(0,39 < T < 3,39)$.

Ej 4. (25 p.) Dadas $X \sim \Gamma(2,1)$ e $Y_{|X=x} \sim \mathcal{U}[0,x]$:

(a) (4 p.) Graficar en el plano el soporte de $f_{XY}(x,y)$.

(b) (6 p.) Hallar la función de densidad marginal de Y. ¿Qué distribución conocida tiene?

(c) (6 p.) Calcular $Cov(X,Y)$ y $Cov(3X, 5Y + E(X^4))$. *(Sugerencia: pensar antes de repetir cálculos.)*

(d) (3 p.) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes? Justificar.

(e) (6 p.) Calcular $P(Y < 1|X = 2)$ y $P(X > 3|Y = 2)$.

JONATHAN SEIJO.

NOTA ①

FECHA

19/20

①

7 N
3 R

Ⓐ

2 N
3 R

Ⓑ

dado → [1] → extraigo 2 bolitas de Ⓑ (sin reponer)

dado → otro valor → extraigo 2 bolitas de Ⓐ (sin reponer) → Coloco en Ⓑ → extraigo 1 de Ⓑ.

D: "el dado salió 1". $P(D) = \frac{1}{6}$

a) Prob de extraer 3 bolitas negras.

4,5/5

PT

$P(3 \text{ Negras}) = P(3 \text{ Negras} \mid D) \cdot P(D) + P(3 \text{ Negras} \mid D^c) \cdot P(D^c)$

• Si salió 1 en el dado, extraigo 2 bolitas solamente, por lo que $P(3 \text{ Negras} \mid D) = 0$.

• Si salió otro valor en el dado, la única forma que hayan salido 3 negras, es que se tomaron 2 negras en A y luego 1 en B.

$P(3 \text{ Negras}) = P(\{2 \text{ en } A\} \cap \{1 \text{ en } B\})$

$= P(1 \text{ Negra en } B \mid 2 \text{ Negras en } A) \cdot P(2 \text{ Negras en } A)$

ahora B tiene 2 Negras más. B': 4N, 3R

2 Negras de A sin reponer

$\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$

→ $\boxed{P(3 \text{ negras}) = \frac{4}{15} \cdot \frac{5}{6} + 0 = \frac{2}{9}}$

NOTA

b) Se sabe que no salió el 1 en el dado.

Hallar P(ultima bolita es roja | No salió 1 en el dado).

· No salió 1 en el dado, la ultima bolita que se extrajo fue de B; pero antes se extrajo de A.

P(Roja de B) = P(Roja de B | 0 Negras A) · P(0 Negras A) +

+ P(Roja de B | 1 Negra A) . P(1 Negra A) + P(Roja de B | 2 Negra A). P(2 negra A)

A: # Negras extraidas de A. $A \sim H(\underset{N}{10}, \underset{B}{7}, \underset{m}{2})$

$P(\{A = 0\}) = \frac{1}{15}$ → Ojo con escribir los eventos bien

$P(A = 1) = \frac{7}{15}$ $\left(\frac{1}{15} + \frac{7}{15} + \frac{7}{15} = 1\right)$

$P(A = 2) = \frac{7}{15}$

5/5

· P(Roja de B | A = 0) = $\frac{5}{7}$

| 2 N / 3 R | → | 2 N / 5 R |

· P(Roja de B | A = 1) = $\frac{4}{7}$

| 2 N / 3 R | → | 3 N / 4 R |

· P(Roja de B | A = 2) = $\frac{3}{7}$

| 2 N / 3 R | → | 4 N / 3 R |

→ $P(\text{Roja de B} / D^c) = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{15} + \frac{4}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{7}}{15} + \frac{3}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{7}}{15} = \boxed{\frac{18}{35}}$

P(Roja de B | no salió 1 en dado) = P(ultima bolita es roja | no salió 1 en dado).

NOTA

JONATHAN
SINTO

HOJA 2

FECHA

c) P(ultimo bolita fue negra).

Es necesario condicionar el dado. $P(\text{ultimo negro}) = P(\text{ultimo negro} / D) . P(D) + P(\text{ultimo negro} / D^c) . P(D^c)$

• CASO: Salió 1 en dado.

UN : "ultimo fue negro"

$P(UN) = P(UN / 1^{ra} \text{ roja}) . P(1^{ra} \text{ roja}) + P(UN / 1^{ra} \text{ Negro}) . P(1^{ra} \text{ Negro})$

$\begin{bmatrix} 2N \\ 2R \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2N \\ 3R \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1N \\ 3R \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2N \\ 3R \end{bmatrix}$

$\frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \cdot \cdot \frac{2}{5}$

$P(UN/D) = \frac{2}{5}$

5/5

• Caso: No salió 1 en dado. (la ultima fue roja o la ultima fue negra).

$P(\text{ultimo negro})_{D^c} = 1 - P(\text{ultimo rojo})_{D^c}$ → USO EJ Anterior.

$= 1 - \frac{18}{35} = \frac{17}{35}$

RTA

$P(\text{ultimo negro} / D^c) = \frac{17}{35}$

$P(\text{ultimo negro}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{17}{35} \cdot \frac{5}{6} = \boxed{\frac{33}{70}}$

d) $P(D / \text{ultimo rojo}) \underset{\text{BAYES}}{=} \frac{P(\text{ultimo rojo} / D) . P(D)}{P(\text{ultimo rojo})}$

4,5/5

pues P(UR) y D

• $P(\text{ultimo rojo} / D) = P(UR / 1^{ra} \text{ ROJA}) . P(1^{ra} \text{ rojo}) + P(UR / 1^{ra} \text{ Negro}) . P(1^{ra} \text{ Negro})$

$\begin{bmatrix} 2N \\ 2R \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1N \\ 3R \end{bmatrix}$

$= \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$

NOTA

$$P(\text{ultimo Rojo}) = P(U.R \mid D)\cdot P(D) + P(U.R \mid D^c)\cdot P(D^c)$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{18}{35}\cdot\frac{5}{6} = \boxed{\frac{37}{70}}$$

$$\Rightarrow P(D \mid \text{ultimo rojo}) = \frac{3/5 \cdot 1/6}{\frac{37}{70}} = \boxed{\frac{7}{37}}$$

JONATHAN
SEIJO.

HOJA

FECHA

(2) $X \sim P(6)$ (clientes por hora).

$[\ E(X) = \lambda = 6\ ]$

a) el intervalo del mediodía dura una hora.

$P(X \geq 3) = 1 - P(X<3) = 1 - P_X(0) - P_X(1) - P_X(2)$.

$P_X(k) = \frac{6^k}{k!} \cdot e^{-6}$

$P_x(0) = \frac{6^0}{0!} \cdot e^{-6} = e^{-6} \approx 0.0025$

$P_x(1) = \frac{6}{1} \cdot e^{-6} = 0.015$

(6/6)

$P_x(2) = \frac{6^2}{2} \cdot e^{-6} = 0.045$

$P(X \geq 3) = \boxed{0.9375}$ → Prob que lleguen al menos 3 clientes.

b)

$Y \sim P(6/4)$ (λ eran clientes en 60 min, queremos que sean 15 min, divido por 4)

$Y \sim P(1.5)$

$P(Y \geq 1) =$ (Prob que haya al menos 1 cliente en 15 min).

$1 - P(Y<1) = 1 - \underset{\text{(tabla)}}{P_Y(0)} = 1 - 0.223 = \boxed{0.777}$

(6/6)

c) $P(Y=0) = 0.223$ (Prob que no lleguen clientes antes que ella si llega tarde).

Z : Días en los que no llegan clientes antes que ella en 5 días

$Z \sim Bi(5,\ 0.223)$

(6/6)

$P(Z=2) = \binom{5}{2} \cdot (0.223)^2\,(0.777)^3 = \boxed{0.233}$

NOTA

JONATHAN SEIJO.

HOJA

FECHA

22/30

③ $T_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$ $\quad$ $T_2 \sim N(4, \delta^2)$

· $E(T_1^3) = 48$, $P(2{,}8 < T_2 < 5{,}2) = 0.9836$.

a) Hallar λ y δ^2

Como $T_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\quad M_{T_1}(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - t} = \lambda(\lambda-t)^{-1}$ $\quad (\lambda > 0)$

$$M_{T_1}'(t) = +\lambda(\lambda-t)^{-2}$$

$$M_{T_1}''(t) = 2\lambda(\lambda-t)^{-3}$$

$$M_{T_1}'''(t) = 6\lambda(\lambda-t)^{-4}$$

Como $E(T_1^3) = 48$, se fue $M_{T_1}'''(t)\Big|_{t=0} = 48$. (está bien definida si $\lambda > 0$)

$$6\lambda(\lambda - 0)^{-4} = 48.$$

$$\frac{6\cancel{\lambda}}{\lambda^{\cancel{4}3}} = 48 \iff \frac{1}{8} = \lambda^3 \iff \boxed{\lambda = \frac{1}{2}}$$

$T_2 \sim N(4, \delta^2)$

$$P(2{,}8 < T_2 < 5{,}2) = P\left(\frac{2{,}8-4}{\delta} < \underbrace{\frac{T_2 - 4}{\delta}}_{Z \sim N(0,1)} < \frac{5{,}2-4}{\delta}\right)$$

$$= P\left(\frac{-1{,}2}{\delta} < Z < \frac{1{,}2}{\delta}\right) = F_Z\left(\frac{1{,}2}{\delta}\right) - F_Z\left(\frac{-1{,}2}{\delta}\right)$$

$$= F_Z\left(\frac{1{,}2}{\delta}\right) - \left(1 - F_Z\left(\frac{1{,}2}{\delta}\right)\right) = 2F_Z\left(\frac{1{,}2}{\delta}\right) - 1 = 0.9836$$

$$F_Z\left(\frac{1{,}2}{\delta}\right) = 0.9918$$

Por tabla,

$$\frac{1{,}2}{\delta} = 2.4 \iff \delta = \frac{1}{2}, \quad \boxed{\delta^2 = \frac{1}{4}}$$

8/8

NOTA

b) P(C_1 funcione 10 años | C_1 funcionó 5 años)

$$= P(T_1 > 10 \mid T_1 > 5)$$

$$= \frac{P(\{T_1 > 10\} \cap \{T_1 > 5\})}{P(T_1 > 5)}$$

$$= \frac{P(T_1 > 10)}{P(T_1 > 5)}$$

$$\cdot\ P(T_1 > 10) = 1 - P(T_1 \leq 10) = 1 - F_{T_1}(10)$$

(uso $\lambda = \frac{1}{2}$ por el anterior)

$$= 1 - \int_0^{10} \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\, dx$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(-2e^{-\frac{1}{2}x} \right)\Big|_0^{10} = 1 - \frac{1}{2}\left(2 - 2e^{-5} \right)$$

$$\simeq 0.007$$

$$\cdot\ P(T_1 > 5) = 1 - P(T_1 \leq 5) = 1 - F_{T_1}(5)$$

$$= 1 - \int_0^{5} \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\, dx$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(2 - 2e^{-\frac{5}{2}} \right) = 0.08.$$

$$\Rightarrow \boxed{P(T_1 > 10 \mid T_1 > 5) = \frac{0.007}{0.08} = 0.0875}$$

Repetir para C_2.

$$\cdot\ P(T_2 > 10 \mid T_2 > 5) = \frac{P(T_2 > 10)}{P(T_2 > 5)}$$

$$\cdot\ P(T_2 > 10) = 1 - P(T_2 \leq 10) = 1 - P\left(\frac{T_2 - 4}{1/2} \leq \frac{10 - 4}{1/2} \right)$$

$$= 1 - \phi(12) \simeq 0$$

$$\cdot\ P(T_2 > 5) = 1 - P(T_2 \leq 5)\ 1 - \phi(2) = 0.0228$$

$$\Rightarrow \boxed{P(T_2 > 10 \mid T_2 > 5) \simeq 0.}$$

8/8

NOTA

JONATHAN SEIJO		HOJA
		FECHA

3) d) $E(T) = 1.89$, $V(T) = 1.28$.

Dar cota inferior para $P(0.39 < T < 3.39)$

$$P(0.39 < T < 3.39)$$
$$= P(1.89 - 1.5 < T < 1.89 + 1.5)$$
$$= P(-1.5 \leq T - 1.89 \leq 1.5)$$
$$= P(|T - 1.89| \leq 1.5)$$

$$= P(|T - \underbrace{1.89}_{E(T)}| \leq 1.5) \underset{\text{Tchevi...}}{\geq} 1 - \frac{V(T)}{(1.5)^2} = 1 - \frac{1.28}{(1.5)^2} = \boxed{0.43}$$

6/6

c)

$$P(T \leq t) = P(\{T_1 \leq t\} \cup \{T_2 \leq t\})$$
$$F_T(t) = F_{T_1}(t) + F_{T_2}(t)$$

No! esos eventos no son ~~independ~~ disjuntos

0/8

$$F_T'(t) = f_T(t) = f_{T_1}(t) + f_{T_2}(t)$$

$$f_T(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{\frac{1}{4}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-4)^2}{2 \cdot 1/16}}$$

ACLARACION POSPARCIAL:

FALTABA RESTARLE LA INTERSECCIÓN

NOTA

Jonathan Seijo.

HOJA

FECHA

④ $X \sim \Gamma(2,1)$ $\quad Y|_{X=x} \sim U(0,x)$

$$f_{Y|X=x} = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

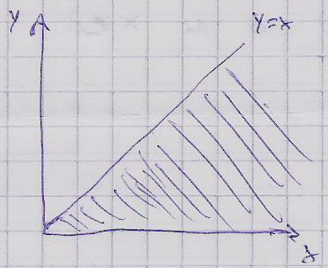
$$f_{Y|X=x} \cdot f_X(x) = f_{XY}(x,y).$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\cancel{x}} \chi_{[0,x]}(y) \cdot \frac{1}{\Gamma(2)} \cdot \cancel{x} \cdot e^{-x} \chi_{(0,+\infty)}(x)$$

$\Gamma(2) = 1.$

$$\boxed{f_{XY}(x,y) = e^{-x} \chi_{[0,x]}(y) \chi_{(0,+\infty)}(x)}$$

a) graficar soporte de f_{XY}



4/4

b) $$f_Y(y) = \int_y^{+\infty} e^{-x} \chi_{(0,+\infty)}(y) \, dx = \chi_{(0,+\infty)}(y) \left(-e^{-x}\right)\Big|_y^{+\infty}$$

$$= \boxed{\chi_{(0,+\infty)}(y) \cdot e^{-y}} \qquad \text{"} -e^{-\infty} \text{"} - (-e^{-y})$$

$$0 + e^{-y}$$

$$\sim \boxed{\mathcal{E}(1)}$$

Tiene distribución $\mathcal{E}(1)$

6/6

c) No son independientes, pues $f_{XY}(x,y) \neq f_X \cdot f_Y$. en un conjunto de ~~area~~ no nulo

$$e^{-x} \chi_{[0,x]}(y) \chi_{(0,+\infty)}(x) \neq e^{-y} \cdot x \cdot e^{-x} \chi_{(0,+\infty)}(y) \chi_{(0,+\infty)}(x)$$

¿Por qué?

2/6

NOTA

e) · $P(Y<1 \mid X=2) = \int_0^1 e^{-2}\,dy \cdot \frac{1}{2\cdot e^{-2}} = \boxed{\frac{1}{2}}$

· $P(X>3 \mid Y=2)$

$= 1 - P(X\le 3 \mid Y=2)$

Pues $\chi_{(0,x)}(2) = 0$ si $x<2$

$= 1 - \left(\int_2^3 e^{-x}\,dx \cdot \frac{1}{e^{-2}}\right)$

$= 1 - \underbrace{\left(\frac{e^{-2} - e^{-3}}{e^{-2}}\right)}_{e^{-1}} = 1 - 0.63 = \boxed{0.37}$

6/6

(C) NR.