1	2	3	4	Calificación
20	28	25	24	97

A

Probabilidad y Estadística (C)

Primer parcial - 11/10/2016

Complete esta hoja y entréguela con el resto del examen. ***Realizar cada ejercicio en hoja separada.*** *Escribir el nombre en cada una. Al retirarse debe firmar una hoja de asistencia.*

APELLIDO Y NOMBRES:.. Nº DE LIBRETA:....................

mail:..@.................................... FIRMA:..........................

Turno: Tarde: 14 a 17 hs | Noche: 19 a 22 hs | Nº de hojas entregadas:

Criterio de aprobación: Para aprobar este examen es necesario sumar al menos 60 puntos o tener al menos dos ejercicios bien resueltos.

Recuerde definir con palabras los eventos y/o las variables aleatorias involucradas, nombres y parámetros de las distribuciones. ***Justifique claramente sus afirmaciones.***

1. (***20 puntos***) Se dispone de dos urnas, cuyo contenido es el siguiente:

Urna A: 5 bolitas rojas y 3 blancas.
Urna B: 1 bolita roja y 2 blancas.

Se arroja un dado equilibrado. Si sale 3 ó 6 se extrae una bolita de la urna A y se la coloca en B, luego se saca una bolita de B. En caso contrario, el proceso se hace a la inversa.

a) (*13 puntos*) Hallar la probabilidad de que ambas bolitas sean rojas.

b) (*7 puntos*) Si ambas bolitas son rojas, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido 3 ó 6?

2. (***30 puntos***) La cantidad de ventas que realiza un local en un día es una variable aleatoria X. Se sabe que X tiene distribución Poisson de parámetro λ y que la probabilidad de que haya exactamente una venta es el doble de la probabilidad de que no haya ninguna. Cada producto que vende el local deja una ganancia de \$100 pesos y el alquiler del local le cuesta \$60 pesos por día. Llamamos G a la ganancia del local en un día (notar que G puede tomar valores negativos, es decir, podría haber pérdida). Un día se dice exitoso si se producen al menos dos ventas.

a) (*8 puntos*) Hallar λ.

b) (*8 puntos*) Hallar $E[G^2]$.

c) (*7 puntos*) Hallar la esperanza y la varianza del número de días exitosos en un mes que tiene 30 días.

d) (*7 puntos*) Cuando ocurre el cuarto día exitoso empezando a contar a partir del primero de junio, se hace una fiesta. Hallar la probabilidad de que la fiesta se haga el 7 de junio.

3. (***25 puntos***) Sea X= "salario semanal (en miles de pesos) de un obrero de la construcción" y supongamos que su función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{81}{x^4} & \text{si } x \geq 3 \\ 0 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

a) (*8 puntos*) Hallar el salario semanal esperado. ¿Cuál es el desvío estándar del salario semanal?

b) (*7 puntos*) Si se eligen obreros de forma independiente hasta encontrar uno cuyo salario semanal sea superior a los $5000, ¿cuál es la probabilidad de que el número de obreros elegidos sea mayor que 3?

c) (*10 puntos*) Encuentre la función de densidad de $Y = \ln\left(\frac{X}{3}\right)$. ¿Qué distribución conocida tiene? ¿De qué parámetros?

4. (***25 puntos***) Un club de vinos cuenta con dos salones, uno para atender a socios habituales (salón A) y el otro para clientes ocasionales (salón B). Sean X e Y los períodos de tiempo, en horas, que se utilizan para la atención de unos y otros respectivamente cada día. La función de densidad conjunta del vector (X, Y) está dada por:

$$f(x,y) = \frac{6}{17}(x+2y)I_{[0,1]}(y)I_{[0,1+y]}(x)$$

a) (*9 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que el salón A se utilice menos de la mitad de tiempo que el salón B?

b) (*8 puntos*) Hallar f_X y f_Y.

c) (*8 puntos*) Si los socios ocasionales van a usar el salón un cuarto de hora, ¿cuál es la probabilidad de que los socios habituales lo usen menos de 3/4 de hora?

1ᵉʳ PARCIAL - PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

HOJA N° 1

FECHA 11/10/2016

20

1) Sean los eventos:

A = "salió la urna A"
B = "salió la urna B"

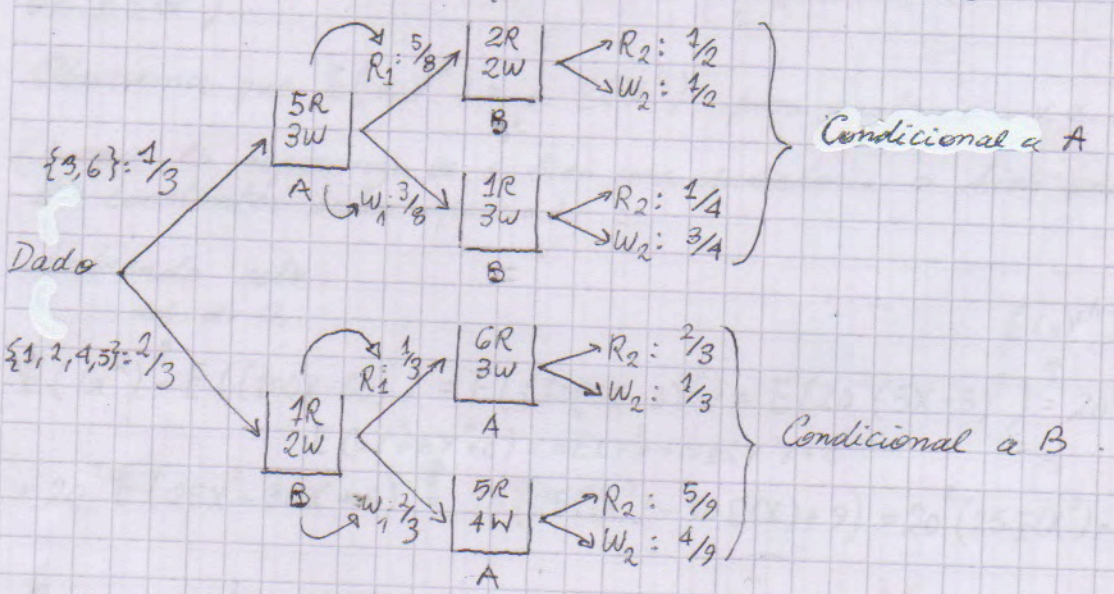
y sea D el número que salió en el dado; $R_D = \{1, \dots, 6\}$

- $P(A) = P(D=3 \cup D=6) = 1/3$.
- $P(B) = P(D \neq 3 \cap D \neq 6) = 2/3$.

Sean (b_1, b_2) las dos bolitas extraídas. Las llamo:

R = bolita roja
W = bolita blanca
↳ (¡para no confundirla con la urna B!)

Veamos los posibles esquemas de extracciones:



a) Busco $P(R_1, R_2)$.

Por probabilidad total: $P(R_1, R_2) = P((R_1, R_2) \cap A) + P((R_1, R_2) \cap B) =$

$= P((R_1, R_2)|_A) \cdot P(A) + P((R_1, R_2)|_B) \cdot P(B)$

$= \underbrace{5/8 \cdot 1/2 \cdot 1/3}_{\circledast} + 1/3 \cdot 2/3 \cdot 2/3 = \dfrac{5}{3 \cdot 2^4} + \dfrac{4}{3^3} = \dfrac{5 \cdot 3^2 + 4 \cdot 2^4}{2^4 \cdot 3^3} = \boxed{\dfrac{109}{432}}$

b) $P(\{3 \text{ o } 6\}|_{(R_1, R_2)}) = P(A|_{(R_1, R_2)}) = \dfrac{\overbrace{P(A \cap (R_1, R_2))}^{\text{calculada en } \circledast}}{\underbrace{P(R_1, R_2)}_{\text{calculada recién}}} = \dfrac{5}{3 \cdot 2^4} \cdot \dfrac{2^4 \cdot 3^3}{109} =$

$= \dfrac{5 \cdot 3^2}{109} = \boxed{\dfrac{45}{109}}$

Muy bien!

NOTA

1er PARCIAL - PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

28 HOJA N° 2

FECHA 11/10/2016

2) X: cantidad de rentas que realiza un local en un día.

Datos: $X \sim Poi(\lambda)$, $P(X=1) = 2 \cdot P(X=0)$.

G: ganancia del local en un día ; $G = 100X - 60$

a) $\forall x \in \mathbb{N}_0$: $P(X=x) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!}$ ✓

$\therefore \dfrac{\cancel{e^{-\lambda}} \cdot \lambda^{1}}{\cancel{1!}_{=1}} = 2 \cdot \dfrac{\cancel{e^{-\lambda}}\, \cancel{\lambda^{0}}^{=1}}{\cancel{0!}_{=1}}$ ✓

$\boxed{\lambda = 2}$ ✓

b) $E(G^2)$

Observemos que $E(a \cdot Y^k) = a \cdot E(Y^k)$ para cualquier v.a. Y, $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$

(porque la esperanza es o bien una sumatoria o bien una integral, y las constantes salen afuera).

Sabiendo esto:

$$E(G^2) \overset{\text{def. de } G}{=} E((100X-60)^2) = E((20(5X-3))^2) = E(20^2(5X-3)^2) \overset{E(aY^k) = aE(Y^k)}{=} 20^2 \cdot E((5X-3)^2) =$$

$$= 20^2 E(25X^2 - 30X + 9) \overset{E(aY^k + bY^n + c) = aE(Y^k) + bE(Y^n) + c}{=} 20^2(25E(X^2) - 30E(X) + 9) = 20^2(25E(X^2) - 30E(X) + 9) = ✪$$ ✓

Busco $E(X^2)$: por definición de varianza,

$var(X) = E(X^2) - E^2(X) \iff E(X^2) = \underset{\lambda}{var(X)} + \underset{\lambda}{E^2(X)} \iff E(X^2) = 2 + 2^2 = 6$. porque la dist. es Poisson.

✪ : $20^2(25 \cdot 6 - 30 \cdot 2 + 9) = 400(150 - 60 + 9) = \boxed{39\,600}$. ✓

Esto mismo lo podías haber usado para G

$E(G^2) = V(G) + E^2(G)$

donde $V(G) = 100^2 V(X)$

y $E(G) = 100E(X) - 60$

c) Sea el evento D: "día exitoso".

Dado un día cualquiera, $P(D) = P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$.

$\therefore P(D) = 1 - \dfrac{e^{-2} \cdot 2^{0}}{0!} - \dfrac{e^{-2} \cdot 2^{1}}{1!} = 1 - 3e^{-2}$. ✓

Sea la variable aleatoria Y: "cantidad de días exitosos en un mes de 30 días".

NOTA Continúa en la carilla siguiente

Y es una v.a. binomial donde el éxito consiste en que el día sea exitoso (valga la redundancia)

$\therefore Y \sim Bin\left(n=30,\ p=1-3e^{-2}\right)$.

Entonces: $E(Y) = np = 30\left(1-3e^{-2}\right) = 30-90\cdot e^{-2} \simeq \boxed{17.8198}$

$var(Y) = np(1-p) = 30\left(1-3e^{-2}\right)\cdot 3e^{-2} \simeq \boxed{7.2349}$

d) Sea la v.a. Z: "cantidad de días exitosos hasta que ocurre el 4to".

$Z \sim BN\left(r=4,\ p=1-3e^{-2}\right)$.

{La fiesta se hace el 7 de junio} = {pasaron 6 días hasta tener 4 éxitos} =

$= \{Z=6\}$

7 7

$\therefore P(\{\text{fiesta el 7 de junio}\}) = P(Z=6) = \binom{6-1}{4-1}\left(1-3e^{-2}\right)^4\left(3e^{-2}\right)^{6-4} =$

$= \binom{5}{3}\left(1-3e^{-2}\right)^4\left(3e^{-2}\right)^2 = \frac{5!}{2!\,3!}\left(1-3e^{-2}\right)^4\left(3e^{-2}\right)^2 \simeq \boxed{0.2052}$

(25)

PARCIAL - PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA | HOJA N° 3

FECHA 11/10/2016

3) X: "salario semanal (en miles de pesos) de un obrero"

$f_X(x) = \frac{81}{x^4} I_{[3,+\infty)}(x)$

a) Salario semanal esperado $= E(X) = \int_3^{+\infty} \frac{81}{x^4} \cdot x \, dx = 81 \int_3^{+\infty} \frac{x}{x^4} \, dx =$

$= 81 \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3} \, dx = 81 \int_3^{+\infty} x^{-3} \, dx = 81 \left(-\frac{x^{-2}}{2} \Big|_3^{+\infty} \right) = 81 \left(-\frac{1}{2x^2} \Big|_3^{+\infty} \right) =$

$= 81 \left(\left(\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2x^2} \right) - \left(-\frac{1}{2\cdot\ {}^2} \right) \right) = 81 \cdot \frac{1}{18} = \boxed{\frac{9}{2}}$

Desvío estándar: $\sqrt{V(X)}$

$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E^2(X)$ $\underbrace{}_{\to} \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 81/4$

$E(X^2) = \int_3^{+\infty} \frac{81}{x^4} \cdot x^2 \, dx = 81 \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx = 81 \int_3^{+\infty} x^{-2} \, dx = 81 \left(-\frac{x^{-1}}{1} \Big|_3^{+\infty} \right) =$

$= 81 \left(-\frac{1}{x} \Big|_3^{+\infty} \right) = 81 \left(\left(\lim_{x \to +\infty} \underbrace{-\frac{1}{x}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0} \right) - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) = 81 \cdot \frac{1}{3} = 27$

$\therefore V(X) = 27 - 81/4 = \frac{108 - 81}{4} = \frac{27}{4} = \frac{3 \cdot 3^2}{2^2}$

$\therefore$ Desvío estándar $= \sqrt{\frac{3 \cdot 3^2}{2^2}} = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{3}}$

b) Z: cantidad de obreros elegidos hasta encontrar uno cuyo salario semanal supere los $5000.

$Z \sim Geom(p = P(X > 5))$, ya que considero que todos los salarios tienen la misma dist. y son independientes

$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F_X(5)$

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ \int_3^{x} \frac{81}{t^4} \, dt & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ $\Rightarrow F_X(5) = \int_3^5 \frac{81}{t^4} \, dt = 81 \int_3^5 \frac{1}{t^4} \, dt$

NOTA: Continúa en la carilla siguiente

$= 81 \int_3^5 t^{-4}\, dt = 81 \left(-\frac{t^{-3}}{3} \Big|_3^5 \right) = 81 \left(-\frac{1}{3t^3} \Big|_3^5 \right) =$

$= 81 \left(-\frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} \right) = 0.784$ ✓

$\therefore P(X>5) = 1 - 0.784 = 0.216 \Rightarrow Z \sim Geom(p = 0.216)$ ✓ $R_Z = \mathbb{N}$ ✓

$P(Z>3) = P(\{3 \text{ seguidos que no ganan más de } \$5000\}) \underset{\text{elecciones } \perp\!\!\!\perp}{=} (P(X \leq 5))^3 =$

$= 0.784^3 = \boxed{0.4818903}$ ✓ ✓

d) $f_Y(y);\ Y = \ln\left(\frac{X}{3}\right)$ $\qquad f_Y(y) = F_Y'(y)$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\ln\left(\frac{X}{3}\right) \leq y\right) \underset{\ln \text{ es creciente estr.}}{=} P\left(\frac{X}{3} \leq e^y\right) = P(X \leq 3e^y) =$

$= F_X(3e^y) \Rightarrow f_Y(y) = (F_X(3e^y))'$ ✓

Busco la acumulada:

$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 3 \\ \int_3^t \frac{81}{x^4}\, dx & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$ ✓ $\qquad F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<3 \\ \underbrace{\left(\frac{1}{81} - \frac{1}{3t^3}\right)\cdot 81}_{\text{Encontré esta función en el punto c) (ver integración)}} & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$

$\therefore F_X(3e^y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 3e^y < 3 \\ 1 - \frac{1}{27 \cdot 3 e^y} & \text{si } 3e^y \geq 3 \end{cases} \rightarrow$ busco cuándo pasa: ✓

$3e^y \geq 3 \iff e^y \geq 1 \underset{e^y \text{ creciente}}{\iff} y \geq 0.$ ✓

$(F_X(3e^y))' = f_X(3e^y)(3e^y)' = 3e^y \cdot f_X(3e^y) = 3e^y \frac{81}{(3e^y)^4} I_{[3,+\infty)}(3e^y)$ ✓

$\hookrightarrow 3e^y \frac{81}{81e^{4y}} = \frac{3e^y}{e^{4y}} = 3e^{-3y}$

$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 3e^{-3y} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$ ✓

Es una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 3$.

1er PARCIAL - PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

24

HOJA Nº 4

FECHA 11/10/2016

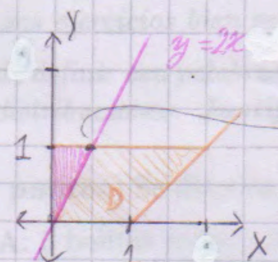
4) X: horas de atención en el salón A
Y: horas de atención en el salón B

$f_{XY}(x,y) = \frac{6}{17}(x+2y)\, I_{[0,1]}(y)\, I_{[0,1+y]}(x)$

Soporte $= D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le 1+y\}$

a) P ({A se utilice menos de la mitad del tiempo que B}) $= P(X < Y/2)$

$= \iint_{R \cap D} f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$, donde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y/2\}$



Integro en la región fucsia

$y = 1$
$x = y/2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$R \cap D : \begin{cases} 0 \le x \le 1/2 \\ 2x \le y \le 1 \end{cases}$

$\iint_{R\cap D} f_{XY}(x,y)\, dy\, dx = \int_0^{1/2}\int_{2x}^{1} \frac{6}{17}(x+2y)\, I_{[0,1]}(x)\, I_{[0,1+y]}(y)\, dy\, dx$

$\frac{6}{17}\int_0^{1/2}\int_{2x}^{1} (x+2y)\, dy\, dx = \frac{6}{17}\int_0^{1/2}\left(xy + y^2 \Big|_{2x}^{1} \right) dx =$

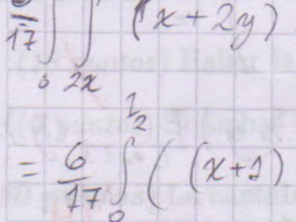
$= \frac{6}{17}\int_0^{1/2}\left((x+1) - (2x^2+4x^2) \right) dx = \frac{6}{17}\int_0^{1/2} x+1-6x^2\, dx =$

$= \frac{6}{17}\left(\frac{x^2}{2} + x - 2x^3 \Big|_0^{1/2} \right) = \frac{6}{17}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{8} \right) = \frac{6}{17}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{6}{17}\cdot\frac{3}{8} =$

$= \frac{3}{17}\cdot\frac{3}{4} = \boxed{\frac{9}{68}}$

b) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\, dy$

Reescribo D como ~~región~~ unión de regiones de tipo 1: $D = D_1 \cup D_2$, $\mu(D_1 \cap D_2) = 0$



$x-1=1$
$x=2$

$D_1 : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$ $D_2 : \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ x-1 \le y \le 1 \end{cases}$

$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \int_0^1 f_{XY}(x,y)\, dy & 0 \le x \le 1 \\ \int_{x-1}^{1} f_{XY}(x,y)\, dy & 1 \le x \le 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases}$

NOTA

$$\cancel{\int_0^1 f_{XY}(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{6}{17}(x+2y) I_{I}}$$

si $0 \le x \le 1$:

$$\int_0^1 f_{XY}(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{6}{17}(x+2y)\,dy = \frac{6}{17}\left(xy+y^2\Big|_0^1\right) = \frac{6}{17}(x+1)$$

si $1 \le x \le 2$: $\displaystyle\int_{x-1}^{1} \frac{6}{17}(x+2y)\,dy = \frac{6}{17}\left(xy+y^2\Big|_{x-1}^{1}\right) =$

$$= \frac{6}{17}\left(x+1-\left(x(x-1)+(x-1)^2\right)\right) = \frac{6}{17}\left(x+1-x^2-x-(x^2-2x+1)\right) =$$

$$= \frac{6}{17}(2x-2x^2) \quad 4$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 6/17\,(x+1) & 0 \le x \le 1 \\ 6/17\,(2x-2x^2) & 1 < x \le 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases}$$

$$f_Y(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{6}{17}(x+2y) I_{[0,1]}(y) \cdot I_{[0,1+y]}(x)\,dx =$$

$$= \frac{6}{17} I_{[0,1]}(y) \int_0^{1+y} x+2y\,dx = \frac{6}{17} I_{[0,1]}(y)\left(\frac{x^2}{2}+2xy\Big|_0^{1+y}\right) =$$

$$= \frac{6}{17} I_{[0,1]}(y)\left(\frac{(1+y)^2}{2}+2y(1+y)\right) \Rightarrow f_Y(y) = \frac{6}{17}(1+y)\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}y\right) I_{[0,1]}(y)$$

c) $P(X \ge 3/4 \mid Y = 1/4) = 1 - P(X \le 3/4 \mid Y = 1/4) = 1 - \displaystyle\int_{-\infty}^{3/4} \frac{f_{XY}(x, 1/2)}{f_Y(1/2)}\,dx$ 1/4 1/4

t. habituales → t. ocasionales

$$\frac{f_{XY}(x,1/2)}{f_Y(1/2)} = \frac{6/17\,(x+2\cdot 1/2) I_{[0,1]}(1/2)\, I_{[0,3/2]}(x)}{6/17\underbrace{(1+1/2)}_{3/2}\underbrace{(1/2+5/4)}_{7/4} I_{[0,1]}(1/2)} = \frac{x+1}{21/8} I_{[0,3/2]}(x) = \frac{8(x+1)}{21} I_{[0,3/2]}(x)$$

$21/8$

$$\Rightarrow P(X \ge 3/4 \mid Y = 1/4) = 1 - \int_{-\infty}^{3/4} \frac{8(x+1)}{21} I_{[0,3/2]}(x)\,dx = 1 - \int_0^{3/4} 8/21\,(x+1)\,dx =$$

$$= 8/21\left(\frac{x^2}{2}+x\Big|_0^{3/4}\right) = 8/21\left(9/32+3/4\right) = 8/21 \cdot 41/32 = \boxed{\frac{41}{84}}$$

NOTA