1/4

TURNO 1

49

Álgebra I - Primer parcial - 17 / 05 / 2014

1	2	3	4	5	Calificación
B/B	B	B	B	B	A

Nombre: [redacted] No. de libreta: [redacted]

Ejercicio 1: Sea $X = \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5,6\})$ y $\mathcal{R}$ la relación definida en X por

$$A \mathcal{R} B \iff (A \Delta B) \cap \{1,2,3\} = \emptyset.$$

1. Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
2. ¿Cuántos elementos tiene la clase de equivalencia de $\{1,2,5\}$?

Ejercicio 2: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_2 = 8, \\ a_n = 5a_{n-1} + 7a_{n-2} \quad \text{para } n \geq 3. \end{cases}$$

Probar que $a_n < 7^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3: Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \equiv 9\,(12)$. Hallar los posibles valores de $(a^2+21a+72 : 252)$.

Ejercicio 4: Determinar el menor $n \in \mathbb{N}$ que verifique simultáneamente $(2n : 40) = 20$, $35|n$ y n tiene exactamente 12 divisores positivos.

Ejercicio 5: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión definida por

$$\begin{cases} a_0 = -1, \\ a_1 = 6, \\ a_{n+1} = 2n(n+3)a_n + 12a_{n-1} \quad \text{para } n \geq 1. \end{cases}$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $2^n | a_n$ pero $2^{n+1} \nmid a_n$.

2/4

[redacted]

01/03

17/05/14

① 1) $\mathcal{R}$ es de equivalencia $\Leftrightarrow$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

a) Reflexiva.

$\forall A \in X,\ A \triangle A = \emptyset \Rightarrow (A \triangle A) \cap \{1,2,3\} = \emptyset \Rightarrow A \mathcal{R} A$ ✓

b) Simétrica.

$A \mathcal{R} B \Rightarrow (A \triangle B) \cap \{1,2,3\} = \emptyset \Rightarrow (B \triangle A) \cap \{1,2,3\} = \emptyset \Rightarrow B \mathcal{R} A$

c) Transitiva.

Veamos primero que $(A \triangle B) \triangle (B \triangle C) = A \triangle C$. Esto se puede probar por tablas de verdad:

A	B	C	$A \triangle B$	$B \triangle C$	$(A \triangle B) \triangle (B \triangle C)$	$A \triangle C$
V	V	V	F	F	F	F
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

Luego $A \triangle C = ((A \triangle B) \cup (B \triangle C)) - ((A \triangle B) \cap (B \triangle C)) \Rightarrow A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$

Si $A \mathcal{R} B$, $B \mathcal{R} C$, $A, B, C \in X$, entonces:

$(A \triangle B) \cap \{1,2,3\} = (B \triangle C) \cap \{1,2,3\} = \emptyset \Rightarrow ((A \triangle B) \cup (B \triangle C)) \cap \{1,2,3\} =$

Como $A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C) \Rightarrow$

$\Rightarrow (A \triangle C) \cap \{1,2,3\} \subseteq ((A \triangle B) \cup (B \triangle C)) \cap \{1,2,3\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (A \triangle C) \cap \{1,2,3\} \subseteq \emptyset \Rightarrow (A \triangle C) = \{1,2,3\} = \emptyset \Rightarrow A \mathcal{R} C$ ✓

Entonces $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia □.

2) Si $A \in \overline{\{1,2,5\}}$, $(A \triangle \{1,2,5\}) \cap \{1,2,3\} = \emptyset \Leftrightarrow$

$\{1,2\} \subseteq A \ \wedge\ 3 \notin A$ ← Es verdad, habría que aclarar porqué (y por qué con eso alcanza)

Entonces $A = \{1,2\} \cup B$, $B \in \mathcal{P}(\{4,5,6\})$.

$\# \mathcal{P}(\{4,5,6\}) = 2^3 = 8 \Rightarrow \#(\overline{\{1,2,5\}}) = 8$

$\boxed{\text{Hay 8 elementos en la clase de equivalencia de } \{1,2,5\}}$.

② Usemos inducción completa en n.

Casos base. $a_1 = 3 < 7 = 7^1$

$a_2 = 8 < 49 = 7^2$.

Supongamos $a_k < 7^k \ \forall\, k \leq n$, ~~[illegible]~~ $n \geq 2$. (Hip inductiva).

Veamos que $a_{n+1} < 7^{n+1}$

$$a_{n+1} = 5a_n + 7a_{n-1} \underset{H.I.}{<} 5\cdot 7^n + 7\cdot 7^{n-1} = 6\cdot 7^n < 7\cdot 7^n = 7^{n+1}$$

Entonces $a_{n+1} < 7^{n+1}$

Esto prueba que $a_n < 7^n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. □

④ $(2n:40) = 20 \Leftrightarrow 20 \mid 2n \wedge 40 \nmid 2n$, ~~[illegible]~~ Demostración:

$\Rightarrow$) ~~[illegible]~~ Para que $(2n:40) = 20$ debe ser $20 \mid 2n$, pero si $40 \mid 2n \Rightarrow 40 \leq (2n:40) = 20$, absurdo.

Luego $40 \nmid 2n$.

$\Leftarrow$) Como $20 \mid 2n$ y $20 \mid 40 \Rightarrow (2n:40) \geq 20$. Además $(2n:40) \in Div(40) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$. Luego $(2n:40) \in \{20, 40\}$.

Pero $40 \nmid 2n \Rightarrow (2n:40) \neq 40 \Rightarrow (2n:40) = 20$. □

Por otra parte $20 \mid 2n \Leftrightarrow 10 \mid n$ y $40 \nmid 2n \Leftrightarrow 20 \nmid n$

Además, como $10 \mid n$ y $35 \mid n \Rightarrow [10:35] \mid n \Rightarrow 70 \mid n$.

Es decir, necesitamos ~~[illegible]~~ el menor $n \in \mathbb{N}$ / $70 \mid n$, $20 \nmid n$, y tiene 12 divisores positivos.

La cantidad de divisores positivos de un número n es ~~[illegible]~~ el producto ~~[illegible]~~ de todas sus valuaciones p-ádicas aumentadas en 1, porque al armar los divisores con los factores primos, cada uno puede no aparecer, o aparecer entre 1 y $v_p(n)$ veces.

Si un número tiene 12 divisores positivos tiene a lo sumo 3 factores [redacted] 3/4

02/03

17/05/14

(porque $12 < 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, no?)

primos, porque $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. En tal caso sus valuaciones p-ádicas son 1, 1 y 2.

Como $n = 70 \cdot K = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot K$, $K \in \mathbb{N}$; debe ser $K \in \{2,3,5\}$ para que n tenga 12 divisores positivos. Para minimizar n conviene minimizar K. Pero $K=2$ no sirve, porque $70 \cdot 2 = 140$ es divisible por 20. Tomemos $K=5$: $70 \cdot 5 = 350$ cumple todo lo pedido.

- $(2 \cdot 350 : 40) = (700 : 40) = (40 : 20) = 20$ ✓
- $35 \mid 350$, pues $350 = 35 \cdot 10$ ✓
- $Div_+(350) = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 25, 35, 70, 175, 350\} \Rightarrow \#Div_+(350) =$

Luego el menor $n \in \mathbb{N}$ que sirve es $\boxed{n = 350}$

(5) Por inducción completa en n, probemos la primera ~~[illegible]~~ afirmación: $2^n \mid a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Casos base.

$$2^0 = 1 \mid -1 = a_0$$
$$2^1 = 2 \mid 6 = a_1$$

Paso inductivo.

Supongamos que $2^k \mid a_k \quad \forall k \leq n, \; n \geq 1$.

Veamos que $2^{n+1} \mid a_{n+1}$.

$$a_{n+1} = 2n(n+3)a_n + 12a_{n-1} = 2[n(n+3)a_n + 2 \cdot 3 a_{n-1}] \quad (1)$$

Por H.I, $2^{n-1} \mid a_{n-1} \Rightarrow 2^{n-1} \mid 3 \cdot a_{n-1} \Rightarrow 2^n \mid 6a_{n-1}$ (2)

$2^n \mid a_n \Rightarrow 2^n \mid n(n+3)a_n$ (3)

De (2) y (3), tenemos que $2^n \mid n(n+3)a_n + 6a_{n+1} \Rightarrow$

$2^{n+1} \mid 2[n(n+3)a_n + 6a_{n-1}] \underset{(1)}{\Rightarrow} 2^{n+1} \mid a_{n+1}$. □

Usando lo que acabamos de probar e inducción completa en n, veamos que $2^{n+1} \nmid a_n$.

<u>Casos base</u> $a_0 = -1$, $\quad 2^1 = 2 \nmid -1 = a_0$

$a_1 = 6$, $\quad 2^2 = 4 \nmid 6 = a_1$

<u>Paso inductivo</u>.

Supongamos $2^{k+1} \nmid a_k \quad \forall\, k \leq n,\ n \geq 1$.

Veamos que $2^{n+2} \nmid a_{n+1}$.

$a_{n+1} = 2\left[n(n+3)\, a_n + 6\, a_{n-1}\right]$

Basta con probar que $2^{n+1} \nmid n(n+3)a_n + 6a_{n-1}$

Por un lado, sabemos que $2^n \nmid a_{n-1}$, por H I.

Entonces $2^n \nmid 3a_{n-1} \Rightarrow 2^{n+1} \nmid 6a_{n-1}$

Por otro lado, por lo anterior $2^n \mid a_n$. Además

$n(n+3) = n^2 + 3n \equiv 0 \pmod 2$, porque:

$n^2 \equiv n \pmod 2$

n	n^2
0	0
1	1

$\pmod 2$

$3 \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow 3n \equiv n \pmod 2$

$n^2 + 3n \equiv 2n \equiv 0 \pmod 2$.

Como $2 \mid n(n+3)$ y $2^n \mid a_n$, tenemos que $2^{n+1} \mid n(n+3)\, a_n$.

Pero $2^{n+1} \nmid 6\, a_{n-1}$. Entonces $2^{n+1} \nmid n(n+3)\, a_n + 6 a_{n-1}$, que es lo que queríamos probar. $\square$

[redacted]

4/4

03/03
17/05/14

(3) Sabemos que $a \equiv 9 \pmod{12}$. Es decir, $r_{12}(a) = 9$. Entonces:

$$a = k \cdot 12 + 9, \; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = 3(4k+3) \Rightarrow 3 \mid a.$$

$$a = 2(6k+4) + 1 \Rightarrow a \equiv 1 \pmod{2}$$

Como $3 \mid a \Rightarrow 3^2 = 9 \mid a^2$. También $3 \mid 7a \Rightarrow 9 \mid 21a$. Además $9 \mid 72$ porque $72 = 8 \cdot 9$.

Entonces $9 \mid (a^2 + 21a + 72)$

Por otro lado, como $a \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{2}$

$$21a \equiv 21 \equiv 1 \pmod{2}$$

De donde $a^2 + 21a \equiv 2 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow a^2 + 21a + 72 \equiv 0 \pmod{2}$

$\Rightarrow 2 \mid (a^2 + 21a + 72)$.

Como 2 y 9 dividen a $(a^2+21a+72) \Rightarrow [2:9] = 18 \mid (a^2+21a+72)$

También sabemos que $12 \nmid (a^2+21a+72)$. ← ¿Por qué?

De todo lo anterior tenemos que:

i) $18 \mid (a^2+21a+72 : 252)$.

ii) $12 \nmid (a^2+21a+72 : 252)$.

También sabemos que $(a^2+21a+72 : 252) \in Div_+(252)$.

$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 18 \cdot 2 \cdot 7$. Es decir que de los divisores positivos de 252, los que son divisibles por 18 son: $\{18, 18 \cdot 2, 18 \cdot 7, 18 \cdot 2 \cdot 7\}$. Pero $18 \cdot 2 = 12 \cdot 3 \Rightarrow 12 \mid 18 \cdot 2$ y $18 \cdot 2 \cdot 7 = 12 \cdot 21 \Rightarrow 12 \mid 18 \cdot 2 \cdot 7$. Sacando a estos números que son divisibles por 12 tenemos que $(a^2+21a+72 : 252) \in \{18, 126\}$.

Es fácil ver que 18 es un valor posible. Tomemos $a = 9$ ($a = 9 \equiv 9 \pmod{12}$). $(a^2+21a+72 : 252) =$

$= (342 : 252) = (252 : 90) = (90 : 72) = (72 : 18) = 18$.

Veamos que no puede ser 126. Si

$(a^2+21a+72 : 252) = 126, \Rightarrow 126 \mid a^2+21a+72 \Longrightarrow$

$7 \mid a^2+21a+72 \Rightarrow 7 \mid a^2+72$, pues $7 \mid 21a$.

Para que esto pase debe ser

$$a^2+72 \equiv 0 \pmod 7$$
$$a^2 \equiv -72 \pmod 7$$
$$a^2 \equiv 5 \pmod 7$$

Y esto es imposible, como se puede ver en una tabla de restos módulo 7:

a	a^2
0	0
1	1
2	4
3	2
4	2
5	4
6	1

(mód 7)

En conclusión, $\boxed{\text{el único valor posible de } (a^2+21a+72 : 252) \text{ es } 18}$