Análisis Matemático I - Matemática I

Análisis II para computólogos - etcétera.

- Apuntes* de la Teórica de Pablo De Nápoli -

Verano 2017

*Tomados por Daniela 

HOJA N° 1

FECHA 30/1

Análisis II

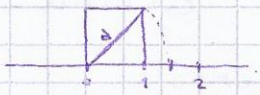
Pablo de Nápoli - poenapo@dm.uba.ar

- 1° parcial — Jueves 23/2 11 hs.
- 2° parcial — Viernes 17/3 11 hs.
- Rec 1° parcial — Sábado 25/3 9:15 hs.
- Rec 2° parcial — Sábado 1/4 9:15 hs.

Bibliografía:

- Libro de Gabriel Larotonda
- Introducción al cálculo y al análisis matemático, de R. Courant F. John
- Apostol - Noriega - Rey Pastor - etc.

Números reales

- $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\dots\}$ → Números naturales. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\mathbb{Z} = \{\dots -3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$ → Números enteros ⇝ se pueden restar sin restricciones
- $\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} / p,q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ → Números racionales ⇝ se pueden dividir
- $\mathbb{I}$: Números irracionales.  $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$.
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ ⇝ Números reales.

Teorema: No existe $d = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($p,q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$) tal que $d^2 = 2$ ($\sqrt{2}$ es irracional)

Podemos suponer $\frac{p}{q}$ irreducible.

Dem: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = d^2 = 2 \implies p^2 = 2q^2$

$\implies p^2$ es par $\implies p$ es par $\implies p = 2\tilde{p}$ con $\tilde{p} \in \mathbb{Z}$

$(2\tilde{p})^2 = 2q^2 \implies 4\tilde{p}^2 = 2q^2 \implies 2\tilde{p}^2 = q^2 \implies q^2$ es par $\implies q$ es par

Esto es ABSURDO pues entonces $\frac{p}{q}$ no sería irreducible. ∎

NOTA

Axioma 1: Propiedad asociativa.

$\forall a,b,c \in \mathbb{R},\ (a+b)+c = a+(b+c)$

Axioma 2: Propiedad conmutativa

$\forall a,b \in \mathbb{R},\quad a+b = b+a$

Axioma 3: Existencia del neutro.

$\exists 0 \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R},\quad a+0 = 0+a = a$

Axioma 4: Existencia del inverso aditivo.

$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists -a \in \mathbb{R}: a+(-a) = (-a)+a = 0 \Rightarrow a-b = a+(-b)$

Axioma 5: Asociativa del producto.

$\forall a,b,c \in \mathbb{R},\ (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

Axioma 6: Conmutativa del producto.

$\forall a,b \in \mathbb{R},\quad a\cdot b = b\cdot a$.

Axioma 7: Neutro del producto.

$\underset{1\neq 0}{\exists 1 \in \mathbb{R}}\ \forall a \in \mathbb{R},\quad a\cdot 1 = 1\cdot a = a$.

Axioma 8: Inverso multiplicativo.

$\forall a \in \mathbb{R},\ a\neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1}: a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = 1 \Rightarrow \quad a:b = a\cdot b^{-1}$

Axioma 9: Propiedad distributiva.

$\forall a,b,c \in \mathbb{R},\quad a(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$.

$\leq$: Relación de orden en $\mathbb{R}$ (en sentido amplio).

Axioma 10: Propiedad reflexiva: $\forall a \in \mathbb{R},\ a \leq a$

Axioma 11: Propiedad antisimétrica: $\forall a,b \in \mathbb{R}\ (a\leq b \wedge b\leq a \Rightarrow a=b)$

Axioma 12: Propiedad transitiva: $\forall a,b,c \in \mathbb{R}\ (a\leq b \wedge b\leq c \Rightarrow a\leq c)$

$a<b \Leftrightarrow a\leq b \wedge a\neq b$

$a>b \Leftrightarrow \sim(a\leq b)$

Axioma 13: Orden total: $\forall a,b \in \mathbb{R}\ (a<b \vee b<a \vee a=b)$

Axiomas de compatibilidad:

AXIOMA 14: Compatibilidad con la suma:

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} \ (a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c)$$

AXIOMA 15: Compatibilidad con el producto

$$\forall a,b \in \mathbb{R} \ (a \leq b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c)$$

Def: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto:

- Un número $c \in \mathbb{R}$ es una cota superior de A si $\forall a \in A$, $a \leq c$
- Un conjunto se dice acotado superiormente si admite alguna cota superior.

Def: Un número $S \in \mathbb{R}$ es el supremo del conjunto A si:

i) S es una cota superior de A

ii) si $\tilde{S}$ es otra cota superior de $A \Rightarrow S \leq \tilde{S}$ (el supremo es la menor de las cotas superiores de A)

obs: En general supremo no es lo mismo que máximo.

Def: Un número a_0 es el máximo de un conjunto A si:

i. $a_0 \in A$

ii. $\forall a \in A \quad a \leq a_0$

Obs: Si S es el supremo de $A \Rightarrow S$ es el máximo de A si y solo si $S \in A$.

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\} \rightarrow$ intervalo cerrado

Supremo de $[a,b] = b =$ máximo de $[a,b]$

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\} \rightarrow$ intervalo abierto.

Supremo de $(a,b) = b \rightarrow$ no tiene máximo.

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$

AXIOMA 16: Axioma de completitud.

Todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente tiene supremo.

NOTA

Ejemplo: $A = \{x \in \mathbb{Q} / x > 0 \wedge x^2 < 2\}$

Sabemos que A es acotado superiormente si $x \in A \Rightarrow x^2 < 2 \Rightarrow x^2 < 4 = 2^2$

y como $x > 0 \Rightarrow x < 2$.

$\Rightarrow$ 2 es una cota superior de A

si pienso $A \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \exists s = \sup(A)$ $\qquad A = (0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$

$s = \sqrt{2}$ (el AXIOMA del supremo no vale en $\mathbb{Q}$)

Def: sea $A \subseteq \mathbb{R}$

- Un número $c \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de A si $\forall a \in A$, $c \leq a$.
- Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es acotado inferiormente si admite alguna cota inferior.

Def: Un número $i \in \mathbb{R}$ es el ínfimo del conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ si

1_ i es una cota inferior de A

11_ Si $\tilde{i}$ es cota inferior de $A \Rightarrow \tilde{i} \leq i$ (el ínfimo es la mayor de las cotas inferiores)

TEOREMA: todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimo.

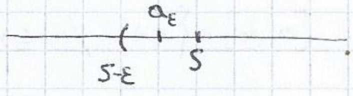
de la Dem:

$a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b$

$\text{Inf}(A) = -\sup(-A)$

$-A = \{-a / a \in A\}$

$$s = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} 1\text{- } s \text{ es cota superior de } A \\ 2'.\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, a_\varepsilon \in A / \ s - \varepsilon < a_\varepsilon \leq s \end{cases}$$



Dem: $1, 2) \Rightarrow 1, 2')$

como $\varepsilon > 0$ $s - \varepsilon < s$ por 2) $s-\varepsilon$ no es una cota superior de A

$\Rightarrow \exists\, a_\varepsilon \in A$ tal que $s - \varepsilon < a_\varepsilon$.

Como $a_\varepsilon \in A$, $a_\varepsilon \leq s$ por 1).

$1, 2') \Rightarrow 1, 2)$ sea $\tilde{s}$ una cota superior de A pvq $s \leq \tilde{s}$.

Si suponemos que no, $s > \tilde{s} \Rightarrow \varepsilon = s - \tilde{s} > 0 \Rightarrow$ por 2') $\exists\, a_\varepsilon \in A / s - \varepsilon < a_\varepsilon \leq s$

ABSURDO, pues $\tilde{s}$ es una cota superior $\Leftarrow$ $s - (s - \tilde{s}) < a_\varepsilon \Rightarrow \tilde{s} < a_\varepsilon$

Luego $s \leq \tilde{s}$

$\bullet\ i = \inf(A) \iff \begin{cases} 1.\ i \text{ es una cota inferior de } A \\ 2.\ \forall \varepsilon > 0 \text{ existe } a_\varepsilon \in A \,/\, i \leq a_\varepsilon < i + \varepsilon \end{cases}$

Una <u>sucesión</u> de números reales es una función $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; $a(n) = a_n$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

$a_n \to l$ a_n converge a l

$l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ l es el límite de a_n

$l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$

<u>Def</u>: $a_n \to l \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \,/\,$ si $\forall n \geq n_0$ entonces $|a_n - l| < \varepsilon$

Reformulación de las propiedades del supremo:

$\bullet\ s = \sup(A) \iff \begin{cases} 1.\ s \text{ es cota superior de } A \\ 2''.\ \exists \text{ una sucesión } (a_n) \subseteq A \,/\, a_n \to s \end{cases}$

<u>Dem</u>: $1, 2') \Rightarrow 1, 2'')$: $\forall n \in \mathbb{N}$ considero $\varepsilon = \frac{1}{n}$

Por $2'')$ existe $s - \frac{1}{n} < a_n \leq s$

$\Rightarrow |a_n - s| < \frac{1}{n} \Rightarrow \boxed{a_n \to s}$

$1, 2'') \Rightarrow 1, 2')$: Supongo tengo $a_n \to s$. Por 1) $a_n \leq s\ \forall n$.

si $n \geq n_0(\varepsilon)$, $|a_n - s| < \varepsilon$, $s - \varepsilon < a_n \leq s$

Reformulación de las propiedades del infimo:

$\bullet\ i = \inf(A) \iff \begin{cases} 1.\ i \text{ es una cota inferior de } A \\ 2.\ \exists\, a_n \in A \,/\, a_n \to i \end{cases}$

SUCESIONES

Def: Una sucesión (a_n) de números reales es una función $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a(n)=a_n$

Def: Sea (a_n) una sucesión, $l \in \mathbb{R}$. Decimos que $a_n \to l$ o que $l = \lim_{n\to\infty} a_n$ (l es el Límite de a_n - o a_n converge a l) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|a_n - l| < \varepsilon$

$\Rightarrow l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$

$l-\varepsilon$ l $l+\varepsilon$ a_n

DESIGUALDAD TRIANGULAR

Recordar: $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$|x+y| \leq |x| + |y|$

$|x-y| \geq |x| - |y|$

$|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$

Obs: El Límite de una sucesión (a_n), si existe, es único.

Supongamos que:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to l \\ a_n \to l' \end{array}\right\} \Rightarrow |l-l'| = |(l-a_n)+(a_n-l')| \underset{\text{TRIANGULAR}}{\leq} |l-a_n| + |a_n-l'|$$

$$< \underset{\text{si } n\geq n_0}{\varepsilon} + \underset{\text{si } n \geq n_0'}{\varepsilon} = \underset{\text{si } n \geq \max\{n_0, n_0'\}}{\underline{2\varepsilon}}$$

$$\underset{\text{si } n \geq \max(n_0, n_0')}{|l-l'| < 2\varepsilon} \Rightarrow \underset{(\forall \varepsilon)}{\boxed{l = l'}}$$

Ejemplo ① $a_n = \frac{1}{n}$ $l = 0$.

PROPIEDAD DE ARQUÍMEDES: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ no está acotado.

Dado $x \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$

Dem: si $\mathbb{N}$ estuviera acotado superiormente $\Rightarrow$ tendría un supremo.

Por el axioma de completitud

Sea $\underset{S\in\mathbb{R}}{S = \sup(\mathbb{N})}$ $n \leq S$ $\forall n$ pero existe $n_0 \in \mathbb{N} / S-1 < n_0 \leq S$

$\Rightarrow S < \underset{\in \mathbb{N}}{\underline{n_0+1}}$ ABSURDO. El absurdo proviene de suponer $\mathbb{N}$ acotado superiormente $\Rightarrow$ no lo está.

siguiendo con ①.

$a_n = \frac{1}{n}$, $l = 0$.

$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

Dado $x = \frac{1}{\varepsilon}$, por la propiedad de ARQUÍMEDES existe un $n_0 / n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Entonces $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$, o sea $\frac{1}{n} \to 0$

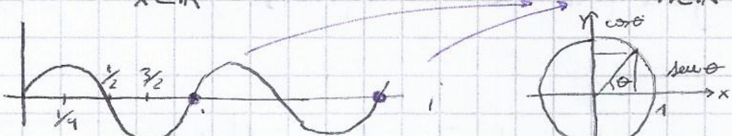
NOTA

Ej ② $a_n = \frac{n+1}{n}$, $l = 1$; $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

$|a_n - l| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ si $n \geq n_0$ (el de antes!)

Obs: No es lo mismo el límite de sucesiones que el de funciones.

$\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathbb{R}}} \operatorname{sen}(2\pi x) =$ no existe ; $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ n \in \mathbb{N}}} \operatorname{sen}(2\pi n) = 0$



Límite de una función: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

$\Leftrightarrow$ si para todo $\varepsilon > 0$ $\exists\, x_0 = x_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ / si $x \in \mathbb{R}$ y $x > x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Obs: si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ y $a_n \to +\infty$ ($\forall M > 0$ existe n_0 tal que si $n \geq n_0$, $a_n > M$)

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = l$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen}(2\pi x) = l$, $f(x) = \operatorname{sen}(2\pi x)$.

$a_n = n$, $f(a_n) = 0 \to l$

$\tilde{a}_n = n + \frac{1}{4}$, $f(\tilde{a}_n) = 1 \to l$ } absurdo.

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10}

$n_1 = 1$ $n_2 = 3$ $n_3 = 4$ $n_4 = 7$ $n_5 = 8$

Def: Dada una sucesión (a_n), una subsucesión es una sucesión de la forma (a_{n_k}) donde (n_k) es una sucesión (infinita) estrictamente creciente de números naturales $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$

Obs: si $a_n \to l \Rightarrow a_{n_k} \xrightarrow[(n_k \to +\infty)]{} l$ para cualquier subsucesión.

Ej ③ $a_n = (-1)^n = \begin{cases} +1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si es impar.} \end{cases}$

$a_{2k} = (-1)^{2k} \underset{\forall k}{=} 1 \to 1$

$n_k = 2k$

$a_{(2k+1)} = (-1)^{2k+1} = -1 \to -1$

$n_k = 2k+1$

} $a_n = (-1)^n$ no tiene límite.

Dem (de la obs): $|a_{n_k} - l| < \varepsilon$ si $k \geq k_0$

$|a_n - l| < \varepsilon$ si $n \geq n_0(\varepsilon)$. $\boxed{n_k \geq k}$ $(n_k \to +\infty)$ $n_k \geq n_0$ si $k \geq k_0(\varepsilon)$

Def: (a_n) es una sucesión acotada si existen dos números tales que
$\forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq a_n \leq M$ $\quad \begin{cases} m = \text{cota inferior} \\ M = \text{cota superior} \end{cases} \rightarrow m, M \in \mathbb{R}.$

Obs1. Basta pedir que valga si $n \geq n_0$ con un n_0 FIJO.

Obs2. Es equivalente pedir que $|a_n| \leq \tilde{M} \quad \forall n$

Ejemplo: $(-1)^n$ ES ACOTADA pero NO ES CONVERGENTE.

TEOREMA: Si (a_n) es convergente ($a_n \to l$, $l \in \mathbb{R}$, ¡FINITO!) entonces (a_n) es acotada
(NO VALE LA RECÍPROCA).

Dem: Por hipótesis $a_n \to l \Rightarrow$ dado $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 / |a_n - l| < 1$ $\boxed{\text{si } n \geq n_0}$.

si $n \geq n_0$ $\quad |a_n| \leq |a_n - l| + |l| < |l| + 1$

Sea $M = \max(|l|+1, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0 - 1}|) \Rightarrow |a_n| \leq M \quad \forall n$

$-M \leq a_n \leq M \Rightarrow (a_n)$ es ACOTADA. ∎

PROPIEDAD ("cero x acotado")

Si $a_n \to 0$ y (b_n) es acotada $\Rightarrow a_n \cdot b_n \to 0$.

Dem: $|b_n| < M \quad \forall n$ con $M > 0$.

dado $\varepsilon > 0 \quad |a_n| = |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$ si $n \geq n_0$.

$\Rightarrow |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$, si $n \geq n_0$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad a_n \cdot b_n \to 0$. ∎

Def: (a_n) es monótona creciente si $\forall n$, $a_n \leq a_{n+1}$

(si $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$ se dice estrictamente creciente)

(a_n) es monótona decreciente si $\forall n$, $\quad a_n \geq a_{n+1}$

(si $a_n > a_{n+1}$ $\forall n$ se dice estrictamente decreciente)

(a_n) es monótona si es monótona creciente o monótona decreciente

TEOREMA: Si (a_n) es monótona y acotada, es convergente (tiene límite finito)

1º Si (a_n) es monótona creciente y acotada $\Rightarrow \lim a_n = \sup\{a_n\}$

2º Si (a_n) es monótona decreciente y acotada $\Rightarrow \lim a_n = \inf\{a_n\}$

Dem: Hagamos el caso 1º (el 2 queda de EJERCICIO)

Si (a_n) es monótona creciente y acotada $\Rightarrow A=\{a_n / n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{R}$ acotada.

Por el axioma de completitud existe $s=\sup(A)\in\mathbb{R}$

1º) $a_n \leq s \ \forall n\in\mathbb{N}$, 2º) Dado $\varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N} / s-\varepsilon < a_{n_0} \leq s$

Si $n \geq n_0$, $a_{n_0} \leq a_n \Rightarrow \boxed{s-\varepsilon < a_n \leq s \ \forall n\geq n_0} \Rightarrow |a_n - s| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \to s$

Ej: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$. (Def de e)

este ejercicio está en el libro de Rey Pastor. (?) Revisar porque no entendí un choto.

Vamos a ver que a_n es monótona creciente y ACOTADA.

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k+1}{n}\right)$$

$\boxed{a_n \leq a_{n+1} \ \forall n}$

Recordar: Binomio de Newton

- $(a+b)^n = \sum_{n=0}^{k} \binom{n}{k} \cdot a^k b^{n-k}$
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$
- $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n$

$0\leq k\leq n$

Si $0\leq j\leq k-1$

$$1-\frac{1}{n+1} \leq 1-\frac{1}{n}$$
$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$$

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

$$a_n \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot 1$$

$k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots k \geq 2\cdot 2\cdot 2\cdots 2 = 2^{k-1} \ \forall k\geq 2$

$$\leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} \leq 1+\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}}_{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}} = 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1+2 = 3 \Rightarrow a_n \leq 3$$

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k = \frac{x^{k+1}-1}{x-1} \quad \text{si } x\neq 1$$
$$= \sum_{j=0}^{k} x^j$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \lim_{k\to+\infty}\sum_{j=0}^{k} x^j = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$

serie geométrica

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k+\cdots = \frac{1}{1-x} \quad \text{si } |x|<1$$

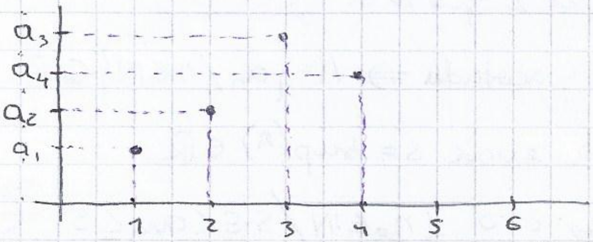
NOTA

TEOREMA DE BOLZANO WEIERSTRASS:

Toda sucesión acotada de números reales tiene una sub-sucesión convergente.

LEMA DE LOS PUNTOS CUMBRES:

Toda sucesión (a_n) de números reales tiene una subsucesión monótona.



Def: Un índice $k \in \mathbb{N}$ se dice un punto cumbre de (a_n) si $a_n < a_k \; \forall n > k$

Sea C el conjunto de todos los puntos cumbres de (a_n):

$C = \{k \in \mathbb{N} / \forall n > k \;\; a_n < a_k\}$

Caso 1: C es infinito, $C = \{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k, \dots\}$

a_{n_k} es estrictamente decreciente, (n_k) es una sucesión infinita
$a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \dots > a_{n_k} > \dots$ $\qquad n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$

Caso 2: C es finito $\Rightarrow \exists n_1 /$ todo $k \geq n_1$ No es punto cumbre.

En particular, n_1 no es un punto cumbre $\Rightarrow \exists \, n_2 > n_1 / a_{n_2} \geq a_{n_1}$

Tomando $k = n_2$ tenemos que n_2 tampoco es un punto cumbre.

$\Rightarrow \exists \, n_3 > n_2$ tal que $a_{n_3} \geq a_{n_2}$.

Tomo $k = n_3 \Rightarrow n_3$ no es punto cumbre $\Rightarrow \exists n_4 / a_{n_4} \geq a_{n_3}$.

Así siguiendo (por inducción) construyo una subsucesión $(a_{n_k}) / a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k}$

Dem (del teorema): Sea (a_n) acotada. Por el lema de los puntos cumbres, existe una subsucesión (a_{n_k}) monótona.

Notemos que (a_{n_k}) es acotada pues (a_n) lo es.

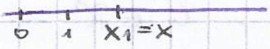
Como (a_{n_k}) es monótona y acotada $\Rightarrow$ es convergente. ∎

NOTA

ESPACIOS VECTORIALES

$y = f(x_1, x_2, \dots, x_d)$, $d \in \mathbb{N}$

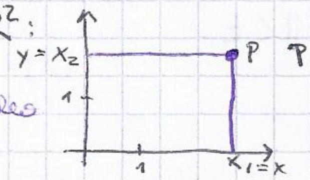
$\mathbb{R}^d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) / x_j \in \mathbb{R}$ para $1 \leq j \leq d\}$

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ 

recta real

$\mathbb{R}^2$:

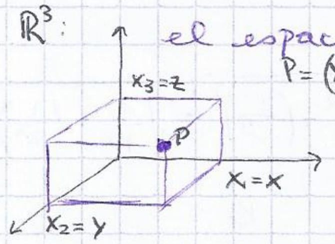
Plano euclideo



$P = (x, y)$

$\mathbb{R}^3$: el espacio euclideo

$P = (x, y, z)$



$(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^d$; $P_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_d^{(n)})$ $x_d^{\gamma} \in \mathbb{R}$

$P_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2^n}\right) \longrightarrow (0,0)$

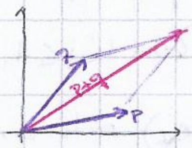
$x_1^{(n)} = \frac{1}{n}$ $x_2^n = \frac{1}{2^n}$

$d(p,q) = |p-q| \rightarrow$ distancia de p a q

- $\mathbb{R}^d$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

$p = (p_1, p_2, \dots, p_d) \in \mathbb{R}^d$

$q = (q_1, q_2, \dots, q_d) \in \mathbb{R}^d$

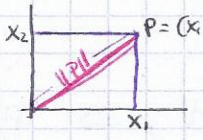


- $p + q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, \dots, p_d + q_d)$.
- $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot p = (\lambda \cdot p_1, \lambda \cdot p_2, \dots, \lambda \cdot p_d)$.

Def: Dado un vector $p = (p_1, p_2, \dots, p_d) \in \mathbb{R}^d$ definimos su norma euclidea (longitud):

(a veces $|p|$)

$\|p\| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_d^2}$

- En $d=1 \rightarrow p = (p_1)$; $\|p\| = |p|$
- En $d=2$: 

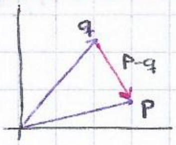
$\|p\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ por pitágoras.

- $p - q = p + (-1) \cdot q = (p_1 - q_1, p_2 - q_2, \dots, p_d - q_d)$

NOTA

DISTANCIA EN $\mathbb{R}^d$: $d(p,q) = \|p-q\|$

$= \sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2+\cdots+(p_d-q_d)^2}$



Def: Sea (P_n) una sucesión de puntos en el espacio $\mathbb{R}^d$, $P_n=(P_1^n, P_2^n, \dots, P_d^n)$, $P_j^n \in \mathbb{R}$

LÍMITE EN $\mathbb{R}^d$: decimos que $P_n \to \vec{l} = (l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{R}^d$ si $\forall \varepsilon > 0$ existe $l = \lim_{n\to\infty} P_n$

un $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0 \Rightarrow \|P_n - l\| < \varepsilon$

$[x]$ = parte entera de x

Ejemplo:

$P_n = \left(1-\frac{1}{n}, \frac{1}{2^n}\right) \in \mathbb{R}^2$, $l = (1,0)$

dado $\varepsilon > 0$...

$\|P_n - l\| = \|(1-\frac{1}{n}, \frac{1}{2^n}) - (1,0)\| = \|(-\frac{1}{n}, \frac{1}{2^n})\| = \sqrt{(-\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{2^n})^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + (\frac{1}{2^n})^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(2^n)^2}} \leq \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{2}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n} < \varepsilon$ ▨

$n \leq 2^n \ \forall n$

$0 < x < y$
$x^2 < y^2$

$0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \leq \frac{1}{n^2}$

TEOREMA: dada una sucesión $P_n = (P_1^n, P_2^n, \dots, P_d^n) \in \mathbb{R}^d$, $l = (l_1, l_2, \dots, l_d) \in \mathbb{R}$

Entonces $P_n \to l$ si y sólo si $P_j^n \to l_j$ para todo $1 \leq j < d$.

Dem: "Solo si" Supongamos que $P_j^n \to l_j \ \forall j$, queremos probar que $P_n \to l$.

Dado $\varepsilon > 0$, para cada j con $1 \leq j \leq d$, existe $n_j \in \mathbb{N} / |P_j^n - l_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ si $n \geq n_j$

Tomo $n_0 = \max(n_1, n_2, \dots, n_d)$ entonces si $n \geq n_0$ vale ⊛ para todo $1 \leq j \leq d$

$\|P_n - l\| = \sqrt{(P_1^n - l_1)^2 + (P_2^n - l_2)^2 + \cdots + (P_d^n - l_d)^2} \leq \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}\right)^2} = \sqrt{\frac{d\,\varepsilon^2}{d}} = \varepsilon$ luego $P_n \to l$

falta la parte "si": supongamos que $P_n \to l$. qvq $P_j^n \to l_j$

Si $P \in \mathbb{R}^d$ $|P_j| \leq \|P\|$ para todo j

$|P_j| = \sqrt{P_j^2} \leq \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + \cdots + P_d^2} = \|P\|$ ⊛

Dado $\varepsilon > 0$ sabemos que $\exists n_0 / \|P_n - l\| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$

$|P_j^n - l_j| = |(P_n - l)_j| \underset{\text{por ⊛}}{\leq} \|P_n - l\| < \varepsilon$

en definitiva $|P_j^n - l_j| < \varepsilon$ si $n \geq n_0 \ \forall j \Rightarrow P_j^n \to l_j$

me dormí pero copié todo

CONJUNTOS

$P \in \mathbb{R}^d$, $r > d$, $r \in \mathbb{R}$

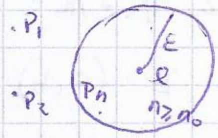
Si, si suponegues una bola.

1. La bola abierta de centro p y radio r es el conjunto: $B(P,r) = \{q \in \mathbb{R}^d / \|P-q\| < r\}$
2. La bola cerrada de centro p y radio r es el conjunto: $\bar{B}(P,r) = \{q \in \mathbb{R}^d / \|P-q\| \leq r\}$

En $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$: $\overset{P-r}{(}\ \overset{P}{|}\ \overset{P+r}{)}$ $B(P,r) = (P-r, P+r)$

$\overset{P-r}{[}\ \overset{P}{|}\ \overset{P+r}{]}$ $\bar{B}(P,r) = [P-r, P+r]$

def: sea (P_n) una sucesión en $\mathbb{R}^d$, $l \in \mathbb{R}^d$.

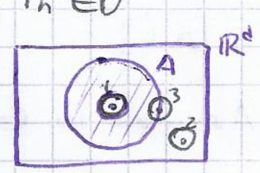


$P_n \to l \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 / P_n \in B(l,\varepsilon)\ \forall n \geq n_0$

Def: Un conjunto U es un entorno de l si existe alguna bola $B(l,\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0 / B(l,\varepsilon) \subseteq U$

$P_n \to l \iff \forall$ entorno U de l $\exists n_0 /$ si $n \geq n_0$, $P_n \in U$

Def: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto, los puntos de $\mathbb{R}^d$ se clasifican respecto a A.



1. P es interior a A $\iff \exists$ algún $\varepsilon > 0 / B(P,\varepsilon) \subseteq A$

   Notación: A° = el interior de A = $\{P / P$ es interior de $A\}$

2. P es exterior a A $\iff \exists$ un $\varepsilon > 0 / B(P,\varepsilon) \cap A = \emptyset$ (la bola no corta al conjunto)

   $\iff$ P es interior a $A^c \to A^{ext} = (A^c)^\circ$

3. P está en la frontera (o borde de A) si $\forall \varepsilon > 0$ $B(P,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y $B(P,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$

   Notación: ∂A = Borde de A

Def: • Un conjunto es abierto si todos sus puntos son interiores (equivale a $\partial A \cap A = \emptyset$)

• Un conjunto es cerrado si contiene a su frontera ($\partial A \subseteq A$)

• La clausura o adherencia de A se define por $\bar{A} = A \cup \partial A$

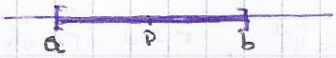
• A es cerrado $\iff A = \bar{A}$

NOTA

Ejemplos:

1- en $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$:

$A = [a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$



$a, b \in A$

$\mathring{A} = (a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$

$\partial A = \{a, b\}$ $\quad$ $A^{ext} = \{x \in \mathbb{R} / x < a \vee x > b\} = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$

$\overline{A} = [a, b]$

A es cerrado, A no es cerrado.

2- $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$:

$B = (a, b)$

$\mathring{B} = (a, b)$ $\quad$ A es abierto.

$\partial B = \{a, b\}$ $\quad$ $B^{ext} = A^{ext}$.

$\overline{B} = [a, b]$ $\quad$ A no es cerrado

Obs: A es abierto $\iff$ A^c es cerrado $\quad$ (PARA PENSAR)

3- $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$:

$C = [a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$

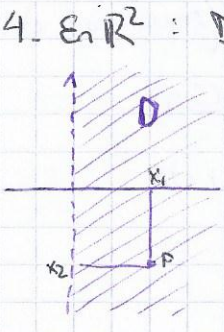
$\mathring{C} = (a, b)$ $\quad$ $\mathring{C} \neq C \Rightarrow$ C no es abierto.

$\partial C = \{a, b\}$ $\quad$ C no es cerrado, pues $b \in \partial C$ pero $b \notin C$.

$\overline{C} = [a, b]$

Obs: Para cualquier conjunto: • $\mathring{A}$ es abierto
• $\overline{A}$ es cerrado.

4- En $\mathbb{R}^2$: $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 > 0\}$



$\mathring{D} = D$, D es abierto

$\partial D = \{(x_1, x_2) / x_1 = 0\}$

$\overline{D} = \{(x_1, x_2) / x_1 \geq 0\}$

$D^{ext} = \{(x_1, x_2) / x_1 < 0\}$

NOTA

5. $E = \mathbb{R}^2$:

$E^\circ = E \Rightarrow \mathbb{R}^2$ es abierto.

$\partial E = \emptyset$; $E^{ext} = \emptyset$

$\overline{E} = \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ es cerrado.

6. $\emptyset \subseteq \mathbb{R}^2$ es abierto y cerrado en $\mathbb{R}^2$.

$F = \{P\}$

$F^{ext} = \mathbb{R}^d \setminus \{P\}$

$F^\circ = \emptyset$; $\partial F = \{P\}$; $\overline{F} = F$ es cerrado.

Obs: $A \subseteq \mathbb{R}^d$ es abierto y cerrado a la vez $\Leftrightarrow A = \mathbb{R}^d$ o $A = \emptyset$

(No lo vamos a demostrar ahora).

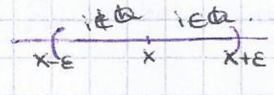
Obs: $P \in \overline{A} \Leftrightarrow$ existe una sucesión $(P_n) \in A$ tal que $P_n \to P$.

Def: P es un punto de acumulación de $A \Leftrightarrow \exists$ una sucesión infinita de puntos todos distintos tal que $P_n \to P$

? → $A = \{P\}$ $P \in \overline{A}$ (P no es un punto de acumulación)

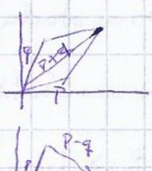
7. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$; $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$, $\mathbb{Q}^{ext} = \emptyset$ → no es ni abierto ni cerrado.



TEOREMA: Las bolas abiertas son abiertas.

Recordar: DESIGUALDAD TRIANGULAR



$\|p+q\| \leq \|p\| + \|q\|$

$\|p-q\| \geq \|p\| - \|q\|$

$\|p-q\| \geq \big|\|p\| - \|q\|\big|$

Dem: $B = B(p,r)$. qvq $B \subseteq B^\circ$

sea $q \in B$ qvq $\exists\, \varepsilon > 0 / B(q,\varepsilon) \subseteq B$.

sea $\varepsilon = r - \|p-q\|$ Como $q \in B \Rightarrow \|p-q\| < r \Rightarrow \varepsilon > 0$

Afirmo $B(q,\varepsilon) \subseteq B$: Sea $x \in B(q,\varepsilon)$. qv $x \in B = (p,r)$

$\|x-p\| = \|(x-q)+(q-p)\| \overset{\text{triangular}}{\leq} \|x-q\| + \|q-p\| < \varepsilon + \|q-p\| = r$, $x \in B(q,\varepsilon)$

$\Rightarrow x \in B(p,r) = B$

Luego, $q \in B^\circ$, Como vale $\forall q \in B \Rightarrow B$ es abierta.

(Ejercicio: Dem. "todas las bolas cerradas son conjuntos cerrados").

Repaso Espacio euclídeo:

$\mathbb{R}^d = \{ P = (p_1, p_2, \dots, p_d) / p_j \in \mathbb{R}$ para $1 \le j \le n \}$; $d \in \mathbb{N}$: dimensión.

norma: $\|P\| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_d^2}$

distancia: $d(p,q) = \|p-q\|$, $p,q \in \mathbb{R}^d$

$(P_n) \in \mathbb{R}^d$, $l \in \mathbb{R}^d$:

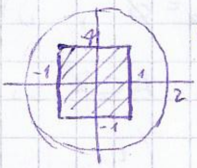
$P_n \to l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : n \ge n_0 \Rightarrow \|P_n - l\| < \varepsilon$

$B(p,r) = \{ q \in \mathbb{R}^d / \|q-p\| < r \}$

Def: $A \subseteq \mathbb{R}^d$: A es acotado $\iff \exists$ una bola $B(p,r)$ con $r>0 / A \subseteq B(p,r)$ (Puedo tomar $P = \vec{0} \in \mathbb{R}^d$)

$\iff \exists r > 0 / \forall q \in A \ \|q\| < r$ $(\le)$

Ejemplo: en $\mathbb{R}^2$: $Q = \{(x,y) / |x| \le 1, |y| \le 1\}$ es acotado



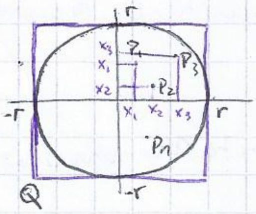
$Q \subseteq B(\vec{0}, 2)$

Una sucesión $(P_n) \in \mathbb{R}^d$ es acotada $\iff A = \{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado.

TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS EN $\mathbb{R}^d$:

Toda sucesión $(P_n) \in \mathbb{R}^d$ acotada tiene una subsucesión convergente.

Dem lo hacemos en el caso $d=2$; $P_n = (x_n, y_n)$. $x_n \in \mathbb{R}$, $y_n \in \mathbb{R}$



Por hipótesis, P_n es acotada $\Rightarrow \exists r > 0 / \forall n \ \|P_n\| < r$

$|x_n| \le \|P_n\| \Rightarrow |x_n| < r$ } Tanto (x_n) como (y_n) son

$|y_n| \le \|P_n\| \Rightarrow |y_n| < r$ } sucesiones acotadas en $\mathbb{R}$ $\begin{cases} x_n \in (-r, r) \\ y_n \in (-r, r) \end{cases}$

$P_n \in B(0,r) \subseteq Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| < r, |y| < r\}$

Como (x_n) es acotada en $\mathbb{R}$, $\Rightarrow \exists$ una subsucesión (x_{n_k}) de x_n / $x_{n_k} \to l_1 \in \mathbb{R}$ (por B-W en $\mathbb{R}$) teorema

Considero la sucesión (y_{n_k}) es una subsucesión de $(y_n) \Rightarrow$ es acotada.

Por teor B-W en $\mathbb{R} \Rightarrow \exists$ una subsucesión $(y_{n_{k_j}})$ convergente: $y_{n_{k_j}} \to l_2 \in \mathbb{R}$ cuando $j \to +\infty$.

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 $\quad$ $x_{n_{k_j}} \to l_1$ pues $(x_{n_{k_j}})$ es

$n_1 = 1$ $\quad n_2 = 4$ $\quad n_3 = 6$

y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 $\quad$ una subsucesión de (x_{n_k})

$n_{k_1} = n_1 = 1$, $k_1 = 1$ $\quad$ $k_2 = 3$, $n_{k_2} = n_3 = 6$.

$\left.\begin{array}{l} x_{n_{k_j}} \to l_1 \\ y_{n_{k_j}} \to l_2 \end{array}\right\} \Rightarrow P_{n_{k_j}} = (x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) \to (l_1, l_2)$ (teorema de la clase pasada)

Listo! Encontramos una subsucesión convergente. ∎

Obs: En d dimensiones hay que repetir el proceso d veces.

$\mathbb{R}^d = \{(x_n', x_n) / x_n' \in \mathbb{R}^{d-1}, x_n \in \mathbb{R}\}$

$(\overbrace{x_1, x_2, \dots, x_{d-1}}^{x' \in \mathbb{R}^{d-1}}, x_d)$

Def: Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^d$ se dice compacto $\iff$ $\forall$ sucesion $(P_n) \subseteq K$ se puede ~~extraer~~ una subsucesión (P_{nk}) tal que $\exists\, l \in \mathbb{R}^d / P_{nk} \to l$ y $l \in K$.

Corolario: Un conjunto $K \in \mathbb{R}^d$ es compacto si y sólo si K es cerrado y acotado.

Dem: "Sólo si": Suponemos K es cerrado y acotado. Veamos que es compacto:

Sea $(P_n) \subseteq K$. Como K es acotado $\Rightarrow (P_n)$ es acotada.

Por el teorema de B-W $\exists$ una subsucesión convergente $P_{n_k} \to l \in \mathbb{R}^d$.

Como K es cerrado, $l \in K$.

Recordar: • K es cerrado $\iff K = \overline{K}$

• $l \in \overline{K} \iff \exists$ una sucesión $(q_n) \subseteq K / q_n \to l$.

"Si": Supongamos que K es compacto. Queremos ver que es cerrado y acotado.

• Si K no fuera acotado, para cada $n \in \mathbb{N}$ existiría $P_n \in K / \|P_n\| > n$.

Entonces (P_n) no tiene ninguna subsucesión convergente (pues $\|P_n\| \to \infty$), Absurdo.

Absurdo! $\Rightarrow$ luego, K es acotado.

• (Si P_{nk} fuera convergente $\Rightarrow (P_{nk})$ sería acotado pero $\|P_{nk}\| \to \infty$) ABSURDO VIOLENTÍSIMO

Falta ver que K es cerrado. Si suponemos que K no es cerrado $\Rightarrow K \neq \overline{K} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ existe $l \in \overline{K}$ tal que $l \notin K$ ($l \in \partial K$ pero $l \notin K$)

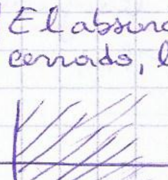
Como $l \in \overline{K}$, $\exists$ una sucesión $(P_n) \subseteq K / P_n \to l$.

Como K es compacto existe una subsucesion $(P_{nk}) / P_{nk} \to \tilde{l} \in K$

Como $P_n \to l \Rightarrow P_{n_k} \to l \Rightarrow l = \tilde{l}$ por unicidad del Límite.

Absurdo pues $\begin{cases} l \notin K \\ \tilde{l} \in K \end{cases}$ El absurdo proviene de suponer que K no es cerrado, luego debe serlo.

Ejemplo: $A = \{(x,y) / x \geq 0\}$ es cerrado pero no acotado



si $(x_n, y_n) \to (l_1, l_2)$ y $x_n \geq 0\ \forall n \Rightarrow l_1 \geq 0$.

$(n, 0) \in A$, $n \in \mathbb{N}$

FUNCIONES

Def: Una función $f: A \to B$ del conjunto A en el conjunto B es una regla (una relación) que a cada elemento X del conjunto A le asigna un único elemento $f(x)$ del conjunto B.

- A se llama el dominio de f
- B se llama el codominio.

$Im(f) = \{y \in B \,/\, \exists$ un $x \in A$ tal que $y = f(x)\}$ → imagen de f.

. $A \subseteq \mathbb{R}$; $f: A \to \mathbb{R}$

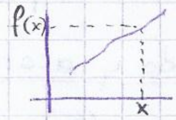


Gráfico de f:

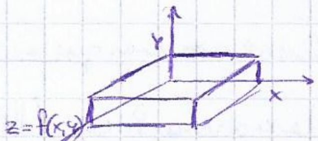
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \in A,\ y = f(x)\}$.

Ejemplos: • $f(x) = \frac{1}{x}$ ⇒ $f: \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$

• $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|^2$ → $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\Big\{$ $f = g$ pues $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

• $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad$ $graf(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = f(x,y);\ (x,y) \in D\}$

x | y | f(x,y) $\quad$ $(a,b,c) \neq \underbrace{(0,0,0)}_{=\vec{0}}$



$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$ $\quad$ un plano en $\mathbb{R}^3$

(a,b,c) ↳ normal del plano.

$z = z_0 + B(x-x_0) + C(y-y_0)$ $\quad$ el plano pasa por (x_0, y_0, z_0).

$\langle (a,b,c), (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \rangle = 0$.

Recordar: producto interno o escalar:
$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\theta$

si $\langle x,y \rangle = 0 \iff x \perp y$

$x, y \in \mathbb{R}^d$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ $\quad$ $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$

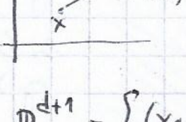
$y = (y_1, y_2, \ldots, y_d)$

$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_d y_d$

$\langle x, x \rangle = \|x\|^2$

$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ desigualdad de Cauchy-Schwarz

• $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
(o $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$)



$f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$; $graf(f) \subseteq \mathbb{R}^{d+1} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_d, x_{d+1}) / x_{d+1} = f(x_1, x_2, \ldots, x_d)\}$.

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $l \in \mathbb{R}^m$

$x_0 \in D$ (no aislado: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ algún otro punto distinto de D en $B(x_0, \varepsilon)$)

Def: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 / $ si $0 < \underbrace{\|x - x_0\|}_{\text{norma en } \mathbb{R}^n} < \delta \Rightarrow \underbrace{\|f(x) - l\|}_{\text{norma en } \mathbb{R}^m} < \varepsilon$

(el >0 hace que $x \neq x_0$)

Ej: $n = m = 1$, $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

$f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 / 0 < \underset{x \neq 0}{|x|} < \delta \Rightarrow \left| \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$.

Ej: $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 8 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1 \neq 8 = g(0) \longrightarrow g$ no es continua en 0.

Ej:

$\lim\limits_{(x,y) \to (2,3)} x \cdot y = 6 = f(2,3)$ $f(x,y) = x \cdot y$; $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. → f es continua en $(2,3)$

$D = \mathbb{R}^2$; $l = 6$; $n = 2$; $m = 1$

$\begin{cases} h = x - 2 \\ k = y - 3 \end{cases}$

* Sea $\delta < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{6}\right)$

• $|f(x,y) - 6| = |x \cdot y - 2 \cdot 3| \Rightarrow$ aplico un cambio de variable: $\begin{cases} x = 2 + h \\ y = 3 + k \end{cases}$

$= |(2+h)(3+k) - 2 \cdot 3| = |\cancel{2 \cdot 3} + 3h + 2k + h \cdot k - \cancel{2 \cdot 3}| \leq 3|h| + 2|k| + |h| \cdot |k|$ → por desig. triang.

$\leq 3\delta + 2\delta + \delta^2 \leq 6\delta < \varepsilon$

$\boxed{\text{si } \delta < 1 \Rightarrow \delta^2 < 1}$ $\boxed{\text{si } \delta < \frac{\varepsilon}{6}}$

• $\|(x,y) - (2,3)\| < \delta$ $\quad |h| \leq \|(h,k)\|$

$\Updownarrow$

$\|(x-2, y-3)\| < \delta$ $\quad |k| \leq \|(h,k)\|$

$\Updownarrow$

$\|(h,k)\| < \delta$ $\quad$ si $\|(x,y) - (2,3)\| < \delta \Rightarrow |h| < \delta$ y $|k| < \delta$

• Def: sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

- f es continua en un punto $x_0 \iff x_0 \in D$ y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f es continua (en D) $\iff$ f es continua en x_0 $\forall x_0 \in D$

Def: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \iff$ si $\forall$ sucesión $(P_n) \in D / P_n \to x_0$ y $P_n \neq x_0$ se cumple que $f(P_n) \to l$

Obs: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = (l_1, l_2)$

$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) \iff \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f_1(x,y) = l_1 \wedge \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f_2(x,y) = l_2$

$f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

FUNCIONES CONTINUAS

Def: Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^m$

- f es continua en un punto $x_0 \in D$ si $f(x_0)$ está definida y $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

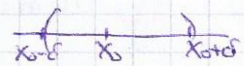
$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 /$ si $x \in D$ y $\underbrace{\|x - x_0\|}_{\text{norma en } \mathbb{R}^d} < \delta \Longrightarrow \underbrace{\|f(x) - f(x_0)\|}_{\text{norma en } \mathbb{R}^m} < \varepsilon$

- f es continua (en D) $\Longleftrightarrow$ f es continua en x_0 $\forall x_0 \in D$.

Ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x}$; $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$; $f: D \to \mathbb{R}$

Veamos que f es continua en D. Sea $x_0 \in D$ $(x_0 \neq 0) \Rightarrow |x - x_0| < \delta$.

$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}\right| = \frac{|x_0 - x|}{|x| \cdot |x_0|} < \frac{\delta}{|x||x_0|}$ ⊛



Tengo que acotar x. Considero la desigualdad triangular:

$|x| = |x_0 - (x_0 - x)| \geq |x_0| - |x_0 - x| \geq |x_0| - \delta \underbrace{\geq}_{\text{si } \delta < \frac{|x_0|}{2}} |x_0| - \frac{|x_0|}{2} = \frac{|x_0|}{2}$.

Sigo con el ejercicio:

⊛ $\frac{\delta}{|x| \cdot |x_0|} < \frac{\delta}{\frac{|x_0|}{2} \cdot |x_0|} = \frac{2\delta}{|x_0|^2} < \varepsilon \longrightarrow$ porque $\delta < \frac{\varepsilon}{2} |x_0|^2$

Dado $\varepsilon > 0$ elijo $\delta < \min\left(\frac{|x_0|}{2} ; \frac{\varepsilon}{2}|x_0|^2\right)$

Obs: En este ejemplo el δ depende del punto x_0 (no es el mismo para todos los x_0) $\Rightarrow$ f NO ES UNIFORMEMENTE CONTINUA en D.

Def: Si el δ se puede elegir independiente de x_0 entonces f es uniformemente continua en D.

Def: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall$ sucesión (P_n) tal que $P_n \to x_0$ y $P_n \neq x_0$ $\forall n$ entonces $f(P_n) \to l$. (sucesión $\in D$)

COROLARIO: $f: D \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$; f es continua en $x_0 \in D \Longleftrightarrow \forall$ sucesión $(P_n) \in D$ se cumple que $f(P_n) \to f(x_0)$.

Ejemplo: $f: \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{x}$. ¿$\exists \lim_{x \to 0} f(x)$? ¿Puedo definir $f(0)$ para que f sea continua en $x_0 = 0$?

$P_n = \frac{1}{2\pi n} \to 0$. $f(P_n) = \operatorname{sen}(2\pi n) = \operatorname{sen} 0 = 0 \to 0$.

$\tilde{P}_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \to 0$; $f(\tilde{P}_n) = \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)}_{} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$.

$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$

$\operatorname{sen}(x + 2\pi n) = \operatorname{sen} x$.

$\not\exists$

$\not\exists \lim_{x \to 0} f(x)$. No es posible definir $f(0) / f$ sea continua en $x_0 = 0$.

HOJA N°

FECHA

Def: $\lim_{x\to x_0} f(x)=l \iff \forall \varepsilon>0 \exists \delta>0 \ \forall x\in D \ (0<\|x-x_0\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-l\|<\varepsilon)$

Dem: ($\Rightarrow$) Supongamos que $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ y sea (P_n) una sucesión tal que $P_n\to x_0$ y $P_n\neq x_0$. Queremos ver que $f(P_n)\to l$

Dado $\varepsilon>0$, sea $\delta>0$ el que le corresponde por la def de límite de función.

(si $x\in D$ y $0<\|x-x_0\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-l\|<\varepsilon$)

Como $P_n\to x_0$, $\exists \ n_0=\underset{=n_0(\varepsilon)}{n_0(\delta)} / \|P_n-x_0\|<\delta$ si $n\geq n_0$.

Como $P_n\neq x_0$, $0<\|P_n-x_0\|<\delta$. luego $\|f(P_n)-l\|<\varepsilon \ \forall n\geq n_0 \Rightarrow f(P_n)\to l$.

($\Leftarrow$) Suponemos que para todo sucesión $(P_n)\in D$ $P_n\to x_0 \wedge \forall n \ P_n\neq x_0$. entonces $f(P_n)\to l$. Quiero ver que $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$. Lo hacemos por el ABSURDO.

• Negaciones:

$\sim(\forall x \ P(x)) \iff \exists x \sim(P(x))$

$\sim(\exists x \ P(x)) \iff \forall x \sim(P(x))$

$\sim(P(x)\Rightarrow Q(x)) \iff P(x)\wedge \sim Q(x)$.

• Negación de la definición de límite:

no es cierto $\lim_{x\to x_0} f(x)=l \iff \exists\varepsilon>0 \ \forall\delta>0 \ \exists x\in D \ (0<\|x-x_0\|<\delta \wedge \|f(x)-l\|\geq\varepsilon)$

Es decir: no es cierto que $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ equivale a decir que existe un $\varepsilon>0$ tal que para todo $\delta>0$ existen $x=x(\delta)$ tal que $0<\|x-x_0\|<\delta$ pero sin embargo $\|f(x)-l\|\geq\varepsilon$.

Considerando lo anterior, continuamos con la demostración.

Tomo $\delta_n=\frac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N})$. Para cada uno tengo $x(\delta_n)=P_n$, que cumple $0<\|P_n-x_0\|<\delta=\frac{1}{n}$

$\wedge\|f(P_n)-l\|\geq\varepsilon$.

entonces $P_n\to x_0$, $P_n\neq x_0$. Por la hipótesis $f(P_n)\to l$.] ABSURDO.

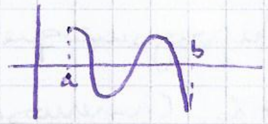
~~luego~~ luego $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$. ■

NOTA

TEOREMA DE BOLZANO: $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$.

Entonces, si $(f(a)>0 \wedge f(b)<0) \vee (f(a)<0 \wedge f(b)>0) \Rightarrow$ o sea, si $f(a) \cdot f(b) < 0$

$\Rightarrow$ existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0)=0$.

Obs: El x_0 puede no ser único: 

Dem: Suponemos que $f(a)>0$ y $f(b)<0$ (si no cambiamos f por $-f$).

Sea $C = \{x \in [a,b] / f(x)>0\}$, C es no vacío, $a \in C$.

C está acotado superiormente ($C \subseteq [a,b] \Rightarrow b$ es una cota superior).

Por el AXIOMA de completitud existe $x_0 = \sup(C)$. Queremos ver que $f(x_0)=0$. ⊛

Lema: (Las funciones continuas mantienen el signo en un entorno)

1- Si $f(x_0)>0$ entonces $\exists\, \delta>0$ tal que si $x \in [a,b]$ y $|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>0$.

2- Si $f(x_0)<0$ entonces $\exists\, \delta>0 /$ si $x \in [a,b] \wedge |x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)<0$.

Dem del lema:

1. Si $f(x_0)>0$ sea $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}>0$, sea $\delta>0 /$ si $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$f(x) = f(x_0) - (f(x_0)-f(x)) \geq f(x_0) - |f(x_0)-f(x)| \geq f(x_0) - \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$.

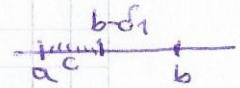
luego $f(x)>0$ si $|x-x_0|<\delta$.

2- Si $f(x_0)<0 \Rightarrow -f(x_0)>0$, $-f$ es otra función continua, le aplico 1.

$\Rightarrow \exists\, \delta>0 /$ si $|x-x_0|<\delta \Rightarrow -f(x)>0 \Rightarrow f(x)<0$.

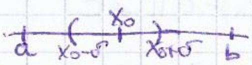
Continuamos con la dem. del teorema:

⊛ Supongamos (por el ABSURDO) que $f(x_0) \neq 0) \Rightarrow f(x_0)>0 \vee f(x_0)<0$.

Caso 1: $f(x_0)>0$: Por el lema $\exists\, \delta>0 /$ si $|x-x_0|<\delta$ y $x \in [a,b] \Rightarrow f(x)>0$ 

observemos que $x_0 \neq b$ pues $f(b)<0 \Rightarrow$ por lema $\exists\, \delta_1>0 / f(x)<0$ en $(b-\delta_1, b] \Rightarrow C \subseteq [a, b-\delta_1]$

luego $b-\delta_1$ es una cota superior de $C \Rightarrow x_0 = \sup(C) \leq b-\delta_1 < b$.

Si llamo $x_1 = x_0 + \frac{\delta}{2}$ $x_1 \in [x_0, x_0+\delta)$  $\Rightarrow x_1 \not< x_0$.

$f(x_1)>0 \Rightarrow x_1 \in C \Rightarrow x_1 \in C \Rightarrow x_1 \leq x_0 = \sup(C) \longrightarrow$ ABSURDO.

el absurdo provino de suponer que $f(x_0)>0$.

luego, esto NO PUEDE PASAR.

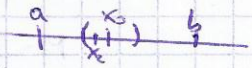
NOTA

CASO 2: $\tilde{f}(x_0) < 0$: entonces, de vuelta por el lema, $\exists \delta > 0 / f(x) < 0$ si $|x - x_0| < \delta$.

Por HIPÓTESIS, $f(a) > 0$, por el lema $\exists \delta_2 > 0 / f(x) > 0$ si $x \in [a, a+\delta_2)$

Tomando $x = a + \frac{\delta_2}{2}$, $f(a + \frac{\delta_2}{2}) > 0 \rightarrow a + \frac{\delta_2}{2} \in C \Rightarrow a + \frac{\delta_2}{2} \leq x_0 = \sup(C)$

$\Rightarrow a < x_0$ (pues $\delta_2 > 0$)



Como x_0 es el supremo de $C \Rightarrow \exists x_2 \in C / x_0 - \delta < x_2 \leq x_0$

$\Rightarrow f(x_2) > 0$ pues $x_2 \in C$.

y por otro $|x_0 - x_2| < \delta$ entonces $f(x_2) < 0$ ABSURDO!

$\therefore$ Como $f(x_0)$ no puede ser positivo ni negativo, debe ser $f(x_0) = 0$ ■

Def: Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^d$ se dice compacto si $\forall$ sucesión $(P_n) \subseteq K$ existe una subsucesión (P_{n_k}) y un punto $l \in K$ tal que $P_{n_k} \rightarrow l$.

Corolario del teorema de B-W:

K es compacto $\Leftrightarrow$ K es cerrado y acotado.

Su intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ $[a,b]$ es compacto.

TEOREMA DE WEIERSTRASS: Sea $K \subseteq \mathbb{R}^d$ compacto y $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua:

1. f es acotada en K; $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / \alpha \leq f(x) \leq \beta \;\forall x \in K$.
   (la IMAGEN de f está acotada superiormente).
2. Sea $m = \inf_{x \in K} f(x)$; $M = \sup_{x \in K} f(x)$ (por 1 están bien definidos).

   entonces existen $x_1 \in K$, $x_2 \in K$ tales que $f(x_1) = m$ mínimo de f en K, $f(x_2) = M$ máximo de f en K.

   o sea, f alcanza su máximo y mínimo en K.

Dem: 1. Veamos que f es acotada superiormente en K (o sea $\exists \beta$).

Si no, $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists P_n \in K$, $f(P_n) > n$.

Como K es compacto, $\Rightarrow \exists$ una subsucesión (P_{n_k}) tal que $P_{n_k} \rightarrow l \in K$.

Como f es continua, $\Rightarrow f(P_{n_k}) \rightarrow f(l) \in \mathbb{R}$.

Por otro lado $f(P_{n_k}) > n_k \Rightarrow f(P_{n_k}) \rightarrow +\infty$ ABSURDO.

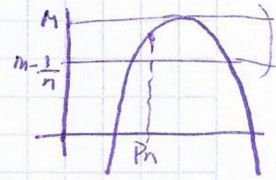
- el absurdo proviene de suponer f no acotada superiormente. Luego debe serlo.
- Cambiando f por $-f$ se prueba que f está acotada inferiormente.

2- Sea $M = \sup_{x \in K} f(x)$ $M \in \mathbb{R}$ por ser f acotado superiormente (AXIOMA DE COMPLETITUD)

Queremos ver que $X_2 \in K$ tal que $f(x_2) = M$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in K$ tal que $M - \frac{1}{n} < f(P_n) \leq M$.

Como K es compacto $\Rightarrow \exists$ una subsucesión $(P_{nk}) / P_{nk} \to l \in K$



Como f es continua $f(P_{nk}) \to f(l)$

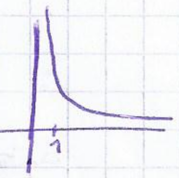
$M - \frac{1}{nk} < f(P_{nk}) \leq M \Rightarrow f(P_{nk}) \to M$; sale que $f(l) = M$
$nk \to \infty$. $(x_2 = l)$.

Por UNICIDAD DEL LÍMITE. ∎

Ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x}$; $f: (0,1] = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x \leq 1\} \to \mathbb{R}$

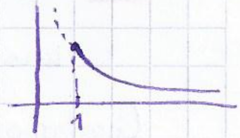
f no está acotada superiormente en $(0,1]$

$f(1/n) = n \to \infty$ $\quad 1/n \in (0,1]$.



Conclusión: El teorema puede no valer si el dominio de f no es cerrado.

otro ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x}$, $f: [1,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\} \to \mathbb{R}$.



$f(n) = \frac{1}{n}$, $n \in [1,+\infty)$

$m = \inf f(x) = 0$, $x \in [1,+\infty)$.

No existe ningún $X_1 \in K$ donde $f(x_1) = m \Rightarrow$ NO HAY MÍNIMO.

($f(x) > 0$ siempre).

Para definir la función en $[0,1]$ tengo que asignar un valor en 0:

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 8 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ f no es continua, $[0,1]$ es compacto.

si $f(1/n) = n \Rightarrow$ f no está acotada superiormente.

CONTINUIDAD

Obs: $f, g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$; si f y g son continuas en $x_0 \in \mathbb{R}^d \Rightarrow$

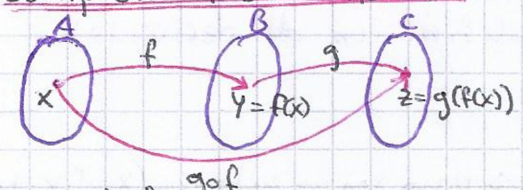
$\Rightarrow f+g$ es continua en x_0; $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$.

$\Rightarrow f-g$ es continua en x_0

$\Rightarrow f \cdot g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es continua en x_0

$\Rightarrow \frac{f}{g}$ es continua en x_0 si $g(x_0) \neq 0$ (en $m=1$).

Composición de funciones:



$g \circ f(x) = g(f(x))$ Composición de f seguida de g.

Def: Si f es continua en x_0 y g es continua en $y_0 = f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en x_0.

Ejemplo: $h(x) = \text{sen}(x^2)$

$h = g \circ f$

$f(x) = x^2$; $g(y) = \text{sen}\, y$

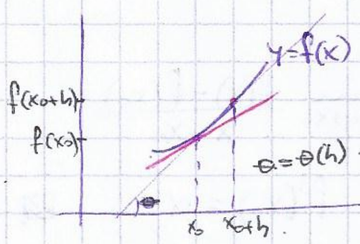
$g \circ f(x) = \text{sen}(x^2) \rightarrow y = x^2$.

DERIVADAS EN UNA VARIABLE

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, D un intervalo, $x_0 \in D^\circ$ (x_0 es interior a D)

$(\exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D)$

Sagemath
Sympy
↳ Coso.



$tg(\theta) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. hago $h \to 0$.

$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{df}{dx}(x_0) \Rightarrow$ Derivada de f en x_0.

Def: f se dice derivable en x_0 si existe $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$; $x = x_0 + h$.

y este número se llama la derivada de f en x_0.

Reglas de la derivada:

- $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$
- $(f-g)'(x_0) = f'(x_0)-g'(x_0)$
- $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f\cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\cdot\left(\frac{-g'(x_0)}{g(x_0)}\right)$

$$= \frac{f(x_0)'g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}, \quad \text{si } g(x_0)\neq 0.$$

- $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$.

- $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$
- $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$

Teorema: (forma equivalente de la definición de derivada).

$f: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in D^\circ$.

f es derivable en x_0 y $f'(x_0)=\alpha\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$ para x en un entorno $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq D$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)+\alpha(x-x_0)}_{\text{La recta tangente}} + \underbrace{R(x)}_{\text{resto o error}} \quad \text{donde } \lim_{x\to x_0}\frac{|R(x)|}{|x-x_0|} = 0 \quad \text{(Desarrollo de Taylor a orden 1)}$$

Dem: $\Rightarrow$) Suponemos que f es derivable en x_0 y $f'(x_0)=\alpha$

Definimos $R(x) = f(x) - [f(x_0)+\alpha(x-x_0)]$. Queremos ver que $\lim_{x\to x_0}\frac{|R(x)|}{|x-x_0|}=0$.

$$\frac{|R(x)|}{|x-x_0|} = \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \alpha\right| \longrightarrow 0, \text{ pues } \alpha = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0.$$

$\Leftarrow$) Si $f(x) = f(x_0)+\alpha(x-x_0)+R(x)$ donde $\lim_{x\to x_0}\frac{|R(x)|}{|x-x_0|}=0$.

$f(x)-f(x_0) = \alpha(x-x_0)+R(x)$.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \alpha + \frac{R(x)}{x-x_0} \quad \underset{x\to x_0}{\text{cuando}} \quad \alpha = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

o sea, $f'(x_0)=\alpha$ ∎

Ejemplo: $f(x) = x^2$

$$f(x) = x^2 = (x_0+h)^2 = x_0^2 + \underbrace{2x_0 h} + \underbrace{h^2}$$

$h = x - x_0$ $\qquad = f(x_0) + \alpha h + R(x)$.

$$\frac{|R(x)|}{|x-x_0|} = \frac{|h|^2}{|h|} = |h| \longrightarrow 0 \quad \text{si } x\to x_0.$$

$\Rightarrow$ f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 2x_0$.

NOTA $R(x) = o(|x-x_0|)$

Notación:

Def → • $f(x) = O(g(x))$ (o grande) cuando $x \to x_0$

$|f(x)| \leq O\, g(x)$ para x en un entorno de x_0.

Ej: $\operatorname{sen}(x) = O(1)$

$n^2 + 8n + 5 = O(n^2)$ cuando $n \to \infty$.

Def → • $f(x) = o(g(x))$ (o pequeña): f es de un orden más pequeño que g cuando $x \to x_0$.

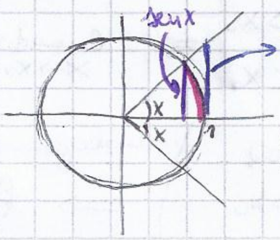
$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Ej: $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^3} = 0$; $\operatorname{sen}(x^4) = O(x^4)$

$\operatorname{sen}(x^2) = o(x^3)$

$(x_0+h)^2 = x_0^2 + 2h x_0 + o(h)$

Para tener en cuenta:



$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

• $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ si $|x| < \pi/2$

$|\operatorname{sen}(x^4)| \leq |x^4| = |x|^4$

• $|x| \leq |\operatorname{tg} x|$

$\Rightarrow x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow \cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$ si $0 < x < \pi/2$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$; $\frac{\operatorname{sen}(-x)}{(-x)} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

Obs: si f es derivable en $x_0 \Rightarrow$ f es continua en x_0

si f es derivable en $x_0 \Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\to f(x_0)} + \underbrace{\alpha(x-x_0)}_{\to 0} + \underbrace{R(x)}_{\to 0}$ donde $\alpha = f'(x_0)$

y $\lim_{x \to x_0} \frac{|R(x)|}{|x-x_0|} = 0$.

Cuando $x \to x_0$, $\lim_{x \to x_0} R(x) = 0$ | $R(x) = \underbrace{\frac{R(x)}{|x-x_0|}}_{\to 0} \cdot \underbrace{|x-x_0|}_{\to 0}$ cuando $x \to x_0$.

$\Rightarrow$ Cuando $x \to x_0$ $f(x) \to f(x_0)$

luego f es continua en x_0 ∎

NOTA

Obs: Existen funciones continuas que NO SON DERIVABLES.

Ej: $f(x) = |x|$

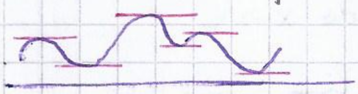
no es derivable en $x_0 = 0$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0 \\ -1 & \text{si } h < 0. \end{cases}$$

Def: $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.

- x_0 es un máximo local si $\exists \delta > 0 / f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in D$ tal que $|x - x_0| < \delta$
- x_0 es un mínimo local si $\exists \delta > 0 / f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in D$ tal que $|x - x_0| < \delta$.

(ambos se llaman extremos locales).



TEOREMA DE FERMAT:

Si $x_0 \in D^\circ$ (en el interior de D) es un extremo local de f $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Dem: Por ejemplo si x_0 es un mínimo local

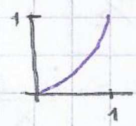
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \geq 0 & \text{si } x > x_0 \\ \leq 0 & \text{si } x < x_0 \end{cases} \Rightarrow \underset{x \to x_0}{\text{Cuando}} \begin{cases} f'(x_0) \geq 0 \\ \wedge \\ f'(x_0) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

(Si x_0 es máximo local:
$$= \begin{cases} \leq 0 & \text{si } x > x_0 \\ \geq 0 & \text{si } x < x_0 \end{cases}$$
) análogamente. $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

∎

Obs: El teorema no funciona si $x_0 \in \partial D$

Ej: $f: D \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$
$D = [0,1]$. $f'(x) = 2x$



$x_0 = 1$ es un máximo (absoluto o global) de f en D
pero $f'(1) = 2 \neq 0$.

TEOREMA DE ROLLE: Suponemos $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y $f(a) = f(b)$. Entonces $\exists x_0 \in (a,b) / f'(x_0) = 0$.

Dem: como f es continua en $[a,b] \Rightarrow$ f alcanza un máximo y un mínimo en dos puntos x_m, x_M de $[a,b]$ por el teorema de Weierstrass (clase pasada)

Si alguno de ellos está en $(a,b) \Rightarrow f'(x_m) = 0$ o $f'(x_M) = 0$

por el teorema de Fermat.

Si $(x_m = a \wedge x_M = b) \vee (x_m = b \wedge x_M = a) \Rightarrow$ f es constante (pues $f(a) = f(b)$)

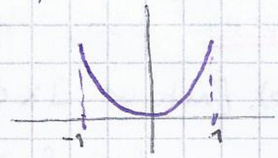
$\Rightarrow f'(x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in (a,b)$.

∎

Ejemplo: $f(x) = x^2$, $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$; $a=-1$, $b=1$.

$f(1) = f(-1) = 1$

En este caso $x_m = x_M = 0$.

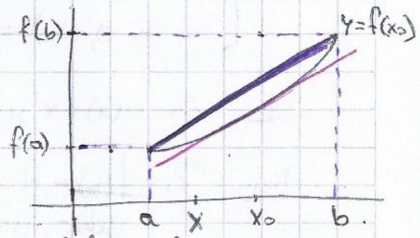


TEOREMA DE LAGRANGE, O TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL:

Supongamos que $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $(a \neq b)$;

f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

Entonces, $\exists x_0 \in (a,b) / \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$



(Existe algún punto donde la recta tangente es paralela a la secante)

Dem: Sea: $\Delta = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \in \mathbb{R}$

Defino $\phi(x) = f(x) - [f(a) + \Delta(x-a)]$, $\phi: [a,b] \to \mathbb{R}$.

y le aplico el teorema de Rolle. $\phi(a) = f(a) - f(a) = 0$.

$\phi(b) = f(b) - [f(a) + \Delta(b-a)] = f(b) - [f(a) + f(b) - f(a)] = 0$

luego existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $\phi'(x_0) = 0$

$\phi'(x) = f'(x) - \Delta$ $\Rightarrow f'(x_0) = \Delta$ $\blacksquare$

Ejemplo: $f(x) = x^3 + x - 8$, $f(0) = -8 < 0$; $f(2) = 2 > 0$.

f es continua en $[0,2] \Rightarrow$ por el teorema de Bolzano existe algún $x_0 \in (0,2) / f(x_0) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1$, el x_0 ES ÚNICO.

(si existieran x_0 y $\tilde{x}_0$, $x_0 \neq \tilde{x}_0$, $x_0, \tilde{x} \in (0,2)$ tales que $f(x_0) = f(\tilde{x}_0) = 0$

por el teorema de Rolle $\Rightarrow \exists x_1 \in (x_0, \tilde{x}_0)$ donde $f'(x_1) = 0$, ABSURDO.

Luego, x_0 es ÚNICO.

Obs: Si $|f'(x)| \leq M$ $\forall x \in (a,b)$, entonces el teorema de Lagrange me da una desigualdad $\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leq M$ o sea $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$ (Condición de Lipschitz)

Ej: $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f'(x) = \cos x$, $|\cos x| \leq 1$ $\forall x$ $(M=1)$

$|\operatorname{sen}(b) - \operatorname{sen}(a)| \leq 1 \cdot |b-a|$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$.

Si tomo $a=0$: $|\operatorname{sen}(b)| \leq |b|$.

Ejercicio: ME QUEDE DORMIDA

Obs: si $f'(x)>0$, $\forall x \in (a,b) \rightarrow f(a)<f(b)$

si $f'(x_0)<0$ $\forall x\in (a,b) \Rightarrow f(a)>f(b)$

TEOREMA DE CAUCHY. $b>a$, sean $f,g:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b)

y $g(a)\neq g(b)$. Entonces $\exists x_0\in(a,b)$ tal que:

$$\begin{cases} 1.\ \text{si } g'(x_0)\neq 0 \Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \\ 2.\ \text{si } g'(x_0)=0 \Rightarrow f'(x_0)=0. \end{cases}$$

Obs: Si $g(x)=x$ se reduce al teorema de Lagrange.

Dem: sea $\Delta = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Sea $\phi(x)=f(x)-\Delta\cdot g(x)$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b)

Queremos ver que $\phi(a)=\phi(b) \Leftrightarrow f(a)-\Delta\cdot g(a) = f(b)-\Delta g(b)$

$\Leftrightarrow f(a)-f(b) = \Delta\big(g(a)-g(b)\big)$

$\Leftrightarrow \Delta$ es el que tomamos.

Por el teorema de Rolle $\exists\, x_0\in(a,b) / \phi'(x_0)=0$.

$\phi'(x_0) = f'(x_0)-\Delta\cdot g'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = \Delta\cdot g'(x_0)$.

$$\begin{cases} 1.\ \text{si } g'(x_0)\neq 0 \Rightarrow \Delta = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \\ 2.\ \text{si } g'(x_0)=0 \Rightarrow f'(x_0)=0 \end{cases}$$

$\blacksquare$

REGLA DE L'HOPITAL: $f,g:(x_0-\delta, x_0+\delta)\rightarrow \mathbb{R}$ derivables.

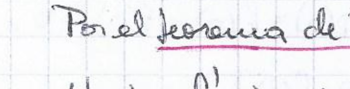
$f(x_0)=g(x_0)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$; ~~y supongamos que g'(x)≠0...~~

y supongamos que $g'(x)\neq 0$ si $0<|x-x_0|<\delta$ entonces $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Dem: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \dfrac{f'(z)}{g'(z)} \longrightarrow l$ (cuando $x\to x_0$, $z(x)\to x_0$)

teorema de Cauchy, donde $z=z(x)\in(x,x_0)$.

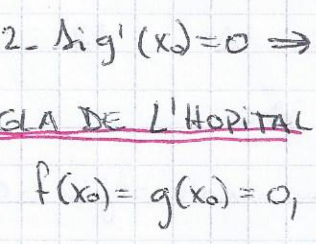
otra cosa.



$\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} = x'(t_0)$

$\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}(t_0)$.

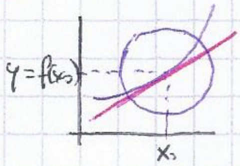
$x:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^3$



NOTA

CLASE PASADA: DERIVABILIDAD EN UNA VARIABLE.

Def: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0}$



$y = f(x_0) + \alpha(x - x_0)$

$\alpha = f'(x_0)$

$f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + R(x)$.

f es derivable en x_0 y $\alpha = f'(x_0) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{|R(x)|}{|x - x_0|} = 0$.

DERIVABILIDAD EN DOS VARIABLES - FUNCIONES DIFERENCIABLES

Def: $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $\text{graf}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = f(x,y) \ ; (x,y) \in D\}$; $p \in \mathbb{R}^2$, $p = (x_0, y_0)$

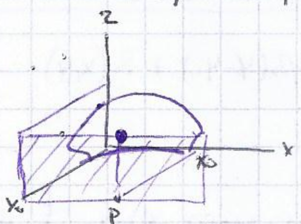
$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = f_x(P) = D_x f(P) = \frac{d}{dx}\Big|_{x=x_0} f(x, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ ⇒ Derivada parcial de f respecto de x en P.

$\frac{\partial f}{\partial y}(P) = f_y(P) = D_y f(P) = \frac{d}{dy}\Big|_{y=y_0} f(x_0, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$ ⇒ Derivada parcial de f respecto a y en P.

Ejemplo: $f(x,y) = xy^2$; $P = (2,3)$

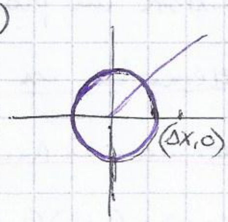
$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{d}{dx}\Big|_{x=2} f(x,3) = \frac{d}{dx}\Big|_{x=2} (9x) = 9$

$\frac{\partial f}{\partial y}(P) = \frac{d}{dy}\Big|_{y=3} f(2,y) = \frac{d}{dy}\Big|_{y=3} 2y^2 = 4y\Big|_{y=3} = 12$.



$z_0 = f(x_0, y_0)$ } Interpretación geométrica.

Ejemplo: $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \lor y = 0 \\ \frac{1}{xy} & \text{si } x \neq 0 \land y \neq 0 \end{cases}$. $P_1 = (0,0)$



$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. f no es continua.

Ni siquiera es acotada en un entorno del $(0,0)$

$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = n^2 \longrightarrow +\infty$ si $n \to +\infty$.

$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ existe sólo si $v = l_1$ o $v = l_2$.

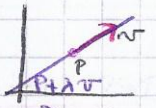
⇓

(ver pág. siguiente)

NOTA

Def: $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_d)$; $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Tomo $v \in \mathbb{R}^d$ (con $\|v\|=1$) y $P \in \mathbb{R}^d$



$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} f(P+\lambda v) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(P+\lambda v) - f(P)}{\lambda} \Rightarrow$$ Derivada direccional de f en P, en la dirección de v.

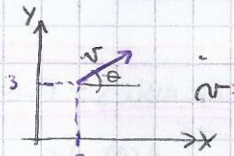
En particular, $l_j = (0,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$ (1 en la posición j)

$\{l_1, l_2, \cdots, l_d\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^d$.

son letras "E" Pensé que eran L

$X = X_1 l_1 + X_2 l_2 + \cdots + X_d l_d$.

Entonces: $\frac{\partial f}{\partial l_j}(P) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(P)$



Ejemplo: $f(x,y) = xy^2$, $P = (2,3)$ $\quad v = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (v_1, v_2)$.

$f(P) = 2 \cdot 3^2 = 18$.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} f(P+\lambda v) = \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} f(2+\lambda v_1, 3+\lambda v_2) = \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} (2+\lambda v_1)(3+\lambda v_2)^2 =$$

$$= \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} (2+\lambda v_1)(9+6\lambda v_2 + \lambda^2 v_2^2) = \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} (18 + 9\lambda v_1 + 12\lambda v_2 + 6\lambda^2 v_1 v_2 + 2\lambda^2 v_2^2 + \lambda^3 v_1 v_2^2)$$

$$= 9v_1 + 12 v_2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(P) = 9 \;;\; \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 12.$$

$f(x,y)$; $P = (x_0, y_0)$:

Obs: todos los planos que pasan por el punto (x_0, y_0, z_0) con $z_0 = f(x_0, y_0)$:

$$z = z_0 + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Def: Un plano de esta forma es el plano tangente al gráfico de f en el punto P si para (x,y) en un entorno de P: $f(x,y) = f(P) + \alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) + R(x,y)$

Con la condición de que $\lim_{(x,y)\to P} \frac{R(x,y)}{\|(x,y)-P\|} = 0$.

Si existe un plano tangente (en este sentido) decimos que f es diferenciable en P.

Seguimos con el mismo ejemplo: $f(x,y) = xy^2$; $P = (2,3)$; $(x,y) = (2+h, 3+k)$

$$f(x,y) = (2+h)(3+k)^2 = (2+h)(9+6k+k^2) = \underbrace{18}_{f(2,3)} + \underbrace{9}_{\alpha}\overbrace{h}^{(x-2)} + \underbrace{12}_{\beta}\overbrace{k}^{(y-3)} + \underbrace{6kh + 2k^2 + hk^2}_{R(h,k)}$$

$$= f(2,3) + 9(x-2) + 12(y-3) + R(h,k) \to = R(x,y).$$

Queremos ver que $\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{|R(x,y)|}{\|(x,y)-(2,3)\|} = 0$.

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{|6kh + 2k^2 + hk^2|}{\|(h,k)\|}$$

$\longrightarrow$

TRIANGULAR.

$|2k^2+hk^2+6hk| \leq 2|k|^2+|h||k|^2+6|h||k| \leq 2\|(h,k)\|^2+\|(h,k)\|^3+6\|(h,k)\|^2$

Dado $\varepsilon>0$, elegimos $\delta<\min\left(1,\frac{\varepsilon}{9}\right)$

$\frac{|2k^2+hk^2+6hk|}{\|(h,k)\|} \leq 2\|(h,k)\|+\|(h,k)\|^2+6\|(h,k)\| \leq 2\delta+\delta^2+6\delta = 8\delta+\delta^2$.

si $\delta>\|(x,y)\|$

como $\delta<1$ $\leq 9\delta<\varepsilon$ pues $\delta<\frac{\varepsilon}{9}$

El límite doble es cero $\Rightarrow$ f es diferenciable en $(2,3)$ y el plano tangente al gráfico de f en el $(2,3,18)$ es:

$z = 18+9(x-2)+12(y-3)$.

Notar que $\frac{\partial f}{\partial x}(P)=9$; $\frac{\partial f}{\partial y}(P)=12$.

TEOREMA: Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{R}^2$. Supongamos que f es diferenciable en P

Entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$ existen y $\frac{\partial f}{\partial x}(P)=\alpha$, $\frac{\partial f}{\partial y}(P)=\beta$

Más aún, dado cualquier vector v con $\|v\|=1$:

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(P)=\alpha v_1+\beta v_2}$ (*) $= \boxed{\langle \nabla f(P), v\rangle}$

Dem: Basta probar (*). En la definición de función diferenciable tomamos $(x,y)=p+\lambda v=(x_0+\lambda v_1, y_0+\lambda v_2)$; $\frac{\partial f}{\partial v}(P)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(P+\lambda v)-f(P)}{\lambda}$

$f(P+\lambda v)=f(P)+\alpha(x_0+\lambda v_1-x_0)+\beta(y_0+\lambda v_2-y_0)+R(x,y)$

$= f(P)+\alpha\lambda v_1+\beta\lambda v_2+R(x,y)$

$\frac{f(P+\lambda v)-f(P)}{\lambda}=\alpha v_1+\beta v_2+\frac{R(x,y)}{\lambda}$

(*) es equivalente a decir que $\frac{R(x,y)}{\lambda}\to 0$.

$\|(x,y)-P\|=\|(x_0+\lambda v_1, y_0+\lambda v_2)-(x_0,y_0)\|=\|(\lambda v_1,\lambda v_2)\|=|\lambda|\cdot\|(v_1,v_2)\|=|\lambda|$

$\underbrace{\frac{|R(x,y)|}{\|(x,y)-P\|}}_{\downarrow}=\left|\frac{R(x,y)}{\lambda}\right|$ ahora $(x(\lambda),y(\lambda))\to P$ cuando $\lambda\to 0$.

0 cuando $(x,y)\to P$ por la definición de función diferenciable.

luego $\frac{|R(x,y)|}{|\lambda|}\to 0$ cuando $\lambda\to 0$.

Por (**) $\frac{\partial f}{\partial v}(P)=\alpha v_1+\beta v_2$.

no tengo idea de dónde mierda salió este doble asterisco.

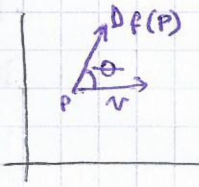
Def: El vector gradiente de f en P: $\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P)\right)$

Si f es diferenciable en P: $\frac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f(P), v \rangle = \|\nabla f\| \cdot \|v\| \cos\theta$

$\frac{\partial f}{\partial v}(P)$ es máxima si $\cos\theta = 1$

$\iff \theta = 0$

$\iff v$ es paralelo al $\nabla f(P)$



El gradiente me da la dirección de MÁXIMO crecimiento.

Def: $L(v) = \alpha v_1 + \beta v_2$; $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Se llama la diferencial de f en P y se nota $Df(P)$

$[L] = [\alpha\ \beta]$ la matriz de L en la base canónica.

Ejemplo: $f(x,y) = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$; $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x,y)\| \leq \sqrt{2}\} = \overline{B}((0,0), \sqrt{2})$

$\text{graf}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}, (x,y) \in D\}$ Como gráfico de una función.

Semi esfera

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \geq 0\}$ (Como superficie de nivel de g

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} / g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ (Como superficie implícita).

Ejemplo: $P = (0,0) \in D$; $f(P) = \sqrt{2}$; $(0,0,\sqrt{2}) \in S$.

¿Cómo es la ecuación del plano tangente a S en P?

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{2 - x^2 - y^2}} \cdot -2x = \frac{-x}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}$ Tomando $\Omega = D^\circ$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}$ si $(x,y) \in D^\circ = \{(x,y) / \|(x,y)\| < \sqrt{2}\}$.

Vamos a ver que f es diferenciable en D° (en cada punto de D°).

Por el siguiente teorema.

El candidato a ser el plano tangente es.

$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$; $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$; $q = (P, f(P)) = (0,0,\sqrt{2})$.

$z = \underbrace{f(P)}_{\sqrt{2}} + 0(x - 0) + 0(y - 0)$

$z = \sqrt{2}$ es el plano tangente a S en q.

Obs: $z = z_0 + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)$ $\Rightarrow$ Ecuación explícita del plano (como gráfico).

$$\left.\begin{array}{l} \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + (-1)(z - z_0) = 0 \\ \langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0); (\alpha, \beta, -1) \rangle = 0 \end{array}\right\} (\alpha, \beta, -1) \text{ es normal al plano.}$$

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto. $f: \Omega \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 en Ω si todas sus derivadas parciales $\frac{\partial f(P)}{\partial x_j}(P)$ existen $\forall$ punto $p \in \Omega$ $(1 \leq j \leq d)$ y $\frac{\partial f}{\partial x_j}: \Omega \to \mathbb{R}$ es continua en Ω.

TEOREMA: Supongamos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es un abierto y $f: \Omega \to \mathbb{R}^2$ es de clase C^1. Entonces $\forall$ $p \in \Omega$, f es diferenciable en P.

FUNCIONES DIFERENCIABLES

Def: Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$; $P \in D^\circ$ (en el interior de D), $P = (P_1, P_2, \dots, P_d)$; $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(P) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(P + \lambda e_j) - f(P)}{\lambda} \; ; \quad e_j = (0, 0, \dots, \underset{\overset{\downarrow}{e_j}}{1}, \dots) \; ; \quad 1 \leq j \leq d$$

Si existen todos: $\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \frac{\partial f}{\partial x_2}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(P) \right) \in \mathbb{R}^d \Rightarrow$ El gradiente de f en P

Def: f es diferenciable en $P \in D^\circ$ si (para x en un entorno de P)

$$f(x) = f(P) + \langle \nabla f(P), x - P \rangle + R(x)$$
$$= f(P) + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(P) \cdot (x_j - P_j) + R(x) \; ; \text{ donde } \lim_{x \to P} \frac{|R(x)|}{\|x - P\|} = 0.$$

$$\lim_{x \to P} \frac{|f(x) - [f(P) + \langle \nabla f(P), x - P \rangle]|}{\|x - P\|} = 0.$$

Def: f es de clase C^1 en un abierto $\Omega \in \mathbb{R}^d$ si $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existen y son continuas en Ω para todo j con $1 \leq j \leq d$.

TEOREMA [*]: Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ es abierto y $f: \Omega \to \mathbb{R}$ es C^1 en $\Omega \Rightarrow$ f es diferenciable en cada punto de Ω

Ejemplo:
$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases} \; ; \; f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (d=2)$$
¿Es diferenciable en $\mathbb{R}^2$?

Observamos $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / (x_1, x_2) \neq (0,0)\}$ es un abierto y f es C^1 en Ω (es un cociente de polinomios donde el denominador no se anula en Ω)

$\Rightarrow$ f es diferenciable en P para todo $P \in \mathbb{R}^2$, $P \neq (0,0)$. ¿Qué pasa si $P = (0,0)$?

Obs:
$$\left. \begin{array}{l} f(x_1, 0) = 0 \;\; \forall x_1 \\ f(0, x_2) = 0 \;\; \forall x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = 0 \; ; \; \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0.$$

$$\frac{R(x)}{\|x - (0,0)\|} = \frac{f(x) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), x - P \rangle}{\|x\|} = \frac{f(x)}{\|x\|} \quad \text{(para este f)}.$$

$$|f(x)| = \left| \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \right| = \frac{|x_1|^2 \cdot |x_2|^2}{\|x\|^2} \leq \frac{\|x\|^4}{\|x\|^2} = \|x\|^2. \qquad |x_1| \leq \|x\| \; ; \; |x_2| \leq \|x\|$$

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|x\| < \varepsilon \text{ si } \|x\| < \varepsilon \; (\text{tomo } \delta = \varepsilon) \Rightarrow \lim_{x \to (0,0)} \frac{|R(x)|}{\|x - (0,0)\|} = 0.$$

$\Rightarrow$ f es diferenciable en (0,0) - hay un plano tangente y es horizontal, pues $\nabla f(0,0) = 0$ (es un punto crítico de f)

TEOREMA $\boxed{**}$: Si f es diferenciable en $P \Rightarrow$ es continua en P.

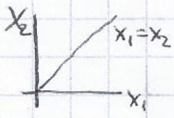
Otro Ejemplo: $g(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2^2}{x_1^2+x_2^2} & \text{si } (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$

g es C^1 en el mismo Ω de antes $\Rightarrow$ g es diferenciable en P $\forall P \in \mathbb{R}^2$, $P \neq (0,0)$.

¿Qué pasa en $P=(0,0)$?

g también se anula sobre los ejes $\Rightarrow \nabla g(0,0) = (0,0)$.

$$\frac{|R(x)|}{\|x-(0,0)\|} = \frac{\frac{x_1 x_2^2}{x_1^2+x_2^2}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \frac{x_1 x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^{3/2}} \not\to 0 \text{ cuando } (x_1,x_2) \to (0,0).$$



si $x_1 = x_2 \neq 0$ $\quad \dfrac{x_1^3}{(2x_1^2)^{3/2}} = \dfrac{x^3}{2^{3/2} x_1^3} = \dfrac{1}{2^{3/2}} \not\to 0$

$\Rightarrow f$ no es diferenciable en $P=(0,0)$

Dem $\boxed{**}$: Cerca de P $f(x) = f(P) + \langle \nabla f(P), x-P \rangle + R(x)$ (*). Queremos ver que $f(x) \to f(P)$ cuando $x \to P$

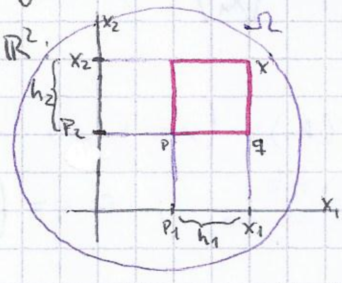
$|\langle \nabla f(P), x-P\rangle| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|\nabla f(P)\| \cdot \|x-P\| \Rightarrow \langle \nabla f(P), x-P \rangle \to 0$ cuando $x \to P$.

$f(x) = \underbrace{\dfrac{R(x)}{\|x-P\|}}_{\downarrow} \underbrace{\|x-P\|}_{\to 0} \longrightarrow 0$ cuando $x \to P$.

Por la definición.

luego, mirando (*) vemos que $f(x) \to f(P)$ cuando $x \to P$. ■

Dem $\boxed{*}$ en $\mathbb{R}^2$:



$h = (h_1, h_2)$; $h = x - P$

$q = (x_1, p_2)$

P está fijo, x se mueve.

$$f(x)-f(P) = [f(x)-f(q)] + [f(q)-f(P)] = [f(x_1,x_2) - f(x_1,p_2)] + [f(x_1,p_2) - f(p_1,p_2)] =$$
$$= (G(x_2) - G(p_2)) + H(x_1) - H(p_1).$$

Inventamos 2 funciones auxiliares de una variable:

$G(t) = f(x_1, t)$, $G: [x_2, p_2] \to \mathbb{R}$

$H(t) = f(t, p_2)$; $H: [x_1, p_1] \to \mathbb{R}$

Por el teorema del valor medio (o teor. de Lagrange):

$$f(x) - f(P) = (x_2-p_2)\cdot G'(c_1) + (x_1-p_1)\cdot H'(c_2) = (x_2-p_2)\cdot \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,c_1) + (x_1-p_1)\cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_2,p_2)$$

$c_1 \in (p_2, x_2)$
$c_2 \in (p_1, x_1)$

$$\langle \nabla f(P), x-P \rangle = (x_1-p_1)\cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_1,p_2) + (x_2-p_2)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_2}(p_1,p_2)$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{|R(x)|}{\|X-P\|}=\frac{|f(x)-f(P)-\langle\nabla f(P),x-P\rangle|}{\|X-P\|}$$

$$\leq \underbrace{\frac{|x_1-P_1|}{\|X-P\|}}_{\leq 1}\cdot\underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_2,P_2)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_1,P_2)\right|}_{\to 0}+\underbrace{\frac{|x_2-P_2|}{\|X-P\|}}_{\leq 1}\underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,c_1)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(P_1,P_2)\right|}_{\to 0}$$

$c_1=c_1(x)$
$c_2=c_2(x)$

Cuando $X\to P$ $\quad (c_2,P_2)\to P=(P_1,P_2)$.
$(x_1,c_1)\to P$.

$\frac{\partial f}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ son continuas en P (pues f es C^1 en Ω por hipótesis).

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_2,P_2)\to\frac{\partial f}{\partial x_1}(P);\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,c_1)\to\frac{\partial f}{\partial x_1}(P)\Rightarrow\frac{|R(x)|}{\|X-P\|}\longrightarrow 0.$$

$\Rightarrow$ f es diferenciable en P. ▨ esto no lo suelen tomar en el final.

Def: Una función $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es una <u>transformación lineal</u> si

① $T(x+y)=T(x)+T(y)\quad\forall x,y\in\mathbb{R}^n$.

$T(\vec{0})=\vec{0}$

② $T(\lambda\cdot x)=\lambda\cdot T(x)\quad\forall\lambda\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^n$.

Ejemplo: $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$T(x_1,x_2)=(x_1-5x_2,\ x_1+8x_2).$$

Def: $B=\{e_1,e_2,\dots e_n\}$ la Base Canónica de $\mathbb{R}^n$. ; $e_j=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\to j$; $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

$X=x_1\cdot e_1+x_2\cdot e_2+\dots+x_n e_n$

$\Rightarrow T(x)=x_1\cdot T(e_1)+x_2\cdot T(e_2)+\dots+x_n\cdot T(e_n)$. (si T es lineal).

$A=[T]\in\mathbb{R}^{n\times m}$ n filas m columnas. ; $A=(a_{ij})$ fila i columna j ; $a_{ij}=(T(e_j))_i$.

Matriz de T en la base canónica.

$T(x)_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$; $T(X)=A\cdot X\to$ Producto de matrices.

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8x_1-5x_2\\16x_1+3x_2\end{pmatrix};\ T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\ e_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}T(e_1)&T(e_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-5\\16&3\end{pmatrix};\ T(e_1)=\begin{pmatrix}8\\16\end{pmatrix};\ T(e_2)=\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$$

$$A\cdot X=\underbrace{\begin{pmatrix}8&-5\\16&3\end{pmatrix}}_{2\times 2}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}8x_1-5x_2\\16x_1+3x_2\end{pmatrix}}_{2\times 1}=T(X)$$

NOTA

Obs: Toda transformación lineal $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es de la forma $T(X)=A\cdot X$ donde $A\in\mathbb{R}^{n\times m}$ es una matriz, y cualquier función de esta forma es una transformación lineal (Hay un ISOMORFISMO).

Def: Sea $f: D\subseteq\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $P\in D^\circ$,

f es diferenciable en P $\Leftrightarrow$ existe una transformación lineal $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ Tal que, en un entorno de P: $f(X)=f(P)+T(X-P)+R(X)$,

donde $\lim\limits_{X\to P}\dfrac{\|R(X)\|}{\|X-P\|}=0$.

La transformación lineal T (que si existe, es única) se llama La diferencial de f en P y se nota $D_f(P)$.

Obs: Si $n=m=1$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: toda transformación lineal $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es de la forma $T_\alpha(x)=\alpha\cdot x$ con $\alpha\in\mathbb{R}$.

Ej: $f(x)=ax+b$ es una T. lineal $\Leftrightarrow b=0$.

- f es diferenciable en P y $D_f(P)=T_\alpha \Leftrightarrow$ f es derivable en P y $f'(P)=\alpha$.

Notación: $y=y(x)$; $\dfrac{dy}{dx}=y'(x)$; $dy:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una t. lineal

$dx:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $dx(P)=P$.

Ej: $y'(x)=y(x)$ $\boxed{\dfrac{dy}{dx}=y} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{dy}{y}=dx}$?

ECUACIÓN DIFERENCIAL

$$\int\frac{dy}{y}=\int dx \qquad dy(x_0)(P)=f'(x_0)\cdot P.$$

$$\ln y = x+c$$

$$y=e^{x+c}$$

Def: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $(m=1)$; $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$; $\alpha=[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n]\in\mathbb{R}^n=[T]$; $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

$$T(X)=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_n x_n$$

$$=\langle\alpha,X\rangle=\alpha\cdot X$$

$$D_f(P)(X)=\langle\nabla f(P),X\rangle;\quad \alpha_j=\frac{\partial f}{\partial x_j}(P)$$

NOTA

TEOREMA: $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $P \in D^\circ$; $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$; $f_j : D \to \mathbb{R}$

① f es diferenciable en $P \Leftrightarrow$ todas las componentes f_j son diferenciables en P.

② En ese caso, la matriz de la diferencial de f en P es:

$[D_f(P)] = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)$ i = nº de filas, j = nº de columna. ; $[D_f(P)] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ n filas m columnas.

$$[D_f(P)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(P) & & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(P) & & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(P) \\ \nabla f_2(P) \\ \vdots \\ \nabla f_m(P) \end{pmatrix}$$

∇f como vector FILA

Ejemplo: $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$; $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $n=2$, $m=3$. $f_1(x) = x_1^2$, $f_2(x) = x_1 x_2$, $f_3(x) = x_1 + x_2$ $\Big\}$ $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son diferenciables en $\mathbb{R}^2$. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{[D_f(P)]}_{\in \mathbb{R}^{3\times 2}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es la transformación lineal que mejor aproxima a f en un entorno de $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$?

Rta: $T = D_f(P)$; $[T] = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$T(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{2\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}}_{3\times 1}$$

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

TEOREMA (clase pasada): $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}$, f es diferenciable en $P \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \underbrace{\alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0)}_{T((x,y)-P)} + R(x,y) \quad \text{donde} \lim_{x \to P} \frac{|R(x,y)|}{\|(x,y)-P\|} = 0$$

$T(x,y) = \alpha x + \beta y$; $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$[T] = [\alpha \ \beta]$

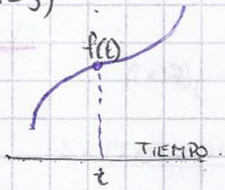
$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(P)$; $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(P)$.

NOTA

Algo interesante (supuestamente)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ (por ej $m=3$)

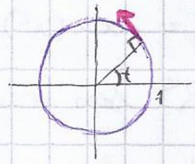
$$[D_f(t)] = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ \vdots \\ f_m'(t) \end{pmatrix}$$



$$f_j'(t) = \frac{df_j}{dt}(t)$$

Ej: $m=2$.

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$



$$f'(t) = [D_f(t)] = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Otra cosa: (el profesor está inspirado, parece)

$q(t) = (x(t), y(t), z(t))$ Posición. $\quad q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

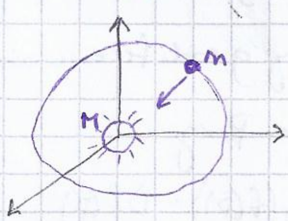
$\dot{q}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ Velocidad.

$\ddot{q}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))$ Aceleración.

$F(q) = m\ddot{q}(t)$

$F: \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} \to \mathbb{R}^3$

fuerza, $m \in \mathbb{R}$ masa.



$$F(q) = GmM\left(\frac{-q}{\|q\|^3}\right)$$

$$\left\|\frac{-q}{\|q\|^3}\right\| = \frac{1}{\|q\|^2}$$

$$F = -\nabla V \; ; \; V(q) = \frac{1}{\|q\|}$$

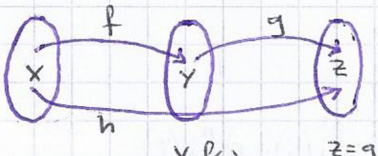
Con todo esto el tipo Tomás quiso decir que todos los "tecnicismos" que estamos viendo son para hacer este tipo de cosas.

O sea, humo.

NOTA

REGLA DE LA CADENA

$f: A \to B$; $g: B \to C$; $h: A \to C$.



$Y = f(x)$ $\quad z = g(Y) = g(f(x))$

$h = g \circ f$ ⟶ composición de f con g.

obs: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \Rightarrow$ LA COMPOSICION DE FUNCIONES ES ASOCIATIVA

obs: La composición NO ES CONMUTATIVA: $f \circ g \neq g \circ f$

Ej: $\left.\begin{array}{l} f(x) = \operatorname{sen} x \\ g(y) = y^2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} g \circ f(x) = (\operatorname{sen} x)^2 \\ f \circ g(x) = \operatorname{sen}(x^2) \end{array}$.

obs: Si $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \wedge S: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ son transformaciones lineales

$\Rightarrow S \circ T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ es una transformación lineal.

Además: $\underbrace{[S \circ T]}_{\mathbb{R}^{n \times k}} = \underbrace{[S]}_{\mathbb{R}^{n \times m}} \cdot \underbrace{[T]}_{\mathbb{R}^{m \times k}}$ (Indica: Producto de matrices)

REGLA DE LA CADENA: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \wedge g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$

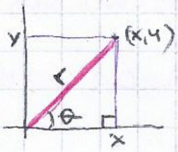
Def: Sea $p \in \mathbb{R}^n$; $q = f(p)$, $h = g \circ f$, $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

Si f es diferenciable en P y g es diferenciable en $q = f(p)$, entonces $h = g \circ f$ es diferenciable en P y

$$D_h(P) = D_g(q) \circ D_f(P) = D_g(f(P)) \circ Df(P).$$

$$\Rightarrow [Dh(p)] = [Dg(q)] \cdot [Df(P)]$$

CAMBIO DE COORDENADAS. ⇒ Coordenadas polares.



$\begin{cases} r = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$; $\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \operatorname{sen}\theta \end{cases}$; $\begin{array}{l} h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \end{array}$.

$h = g \circ f$

$g(x,y)$ = una cantidad en coordenadas cartesianas.

$h(r,\theta)$ = la misma cantidad en coordenadas polares.

$h(r,\theta) = g(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$.

¿Qué relación hay entre $\dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y} \wedge \dfrac{\partial h}{\partial r}, \dfrac{\partial h}{\partial \theta}$?

$f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$

⟹

$p=(r,\theta)$; $q=f(p)=(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)=(x,y)$.

$$\underbrace{[D_h(p)]}_{\in \mathbb{R}^{1\times 2}} = \underbrace{[D_g(q)]}_{\mathbb{R}^{1\times 2}} \cdot \underbrace{[D_f(p)]}_{\mathbb{R}^{2\times 2}}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial r}(p) & \frac{\partial h}{\partial \theta}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial r}(q) & \frac{\partial g}{\partial \theta}(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial r}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(p) \end{bmatrix} = [D_f(r,\theta)]$$

$$[D_f(r,\theta)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow$$ Matriz Jacobiana del cambio de coordenadas polares.

$J=\det[Df(r,\theta)]$ (Jacobiano).

$= r\cos^2\theta + r\,\text{sen}^2\theta$

$= r$.

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial r}(p) = \cos\theta \frac{\partial g}{\partial x}(q) + \text{sen}\,\theta \frac{\partial g}{\partial x}(q) \\ \frac{\partial h}{\partial \theta}(p) = (-r\,\text{sen}\,\theta)\frac{\partial g}{\partial y}(q) + r\cos\theta\left(\frac{\partial g}{\partial y}(q)\right) \end{cases}$$

Ejemplo: $g(x,y)=x^2+y^2$; $h(r,\theta)=r^2$

$2r = \cos\theta \cdot 2x + \text{sen}\,\theta \cdot 2y$

$= 2(r\cos^2\theta + r\,\text{sen}^2\theta)$

$= 2r$

$0 = (-r\,\text{sen}\,\theta)\cdot 2x + r\cos\theta\, 2y$

$= -r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \cdot 2 + r\cos\theta\,\text{sen}\,\theta \cdot 2$.

OTRA SITUACIÓN FRECUENTE: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $h = g\circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$[D_h(t)] = \underbrace{[D_g(q)]}_{\mathbb{R}^{1\times n}} \cdot \underbrace{[D_f(t)]}_{\mathbb{R}^{n\times 1}}$$

$$[h'(t)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(q), \frac{\partial g}{\partial x_2}(q) \cdots \frac{\partial g}{\partial x_n}(q) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial t} \end{pmatrix} ; \quad h'(t) = \langle \nabla g(q), f'(t) \rangle$$

NOTA

$h'(t) = \langle \nabla g(q), f'(t) \rangle$ ⊛ .

Ejemplo: Posición $q(t) = (x(t), y(t), z(t))$ (va a jugar el rol de f, $n=3$).

fuerza. $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $m \in \mathbb{R}$

$F(q(t)) = m \cdot \ddot{q}(t) \to$ 2da ley de Newton.

En muchos modelos $F(q) = -\nabla V(q)$ donde $V: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (potencial)

Energía mecánica $\to$ $E(t) = \underbrace{\frac{1}{2} m \|\dot{q}(t)\|^2}_{\text{energía cinética}} + \underbrace{V(q(t))}_{\text{energía potencial}}$.

TEOREMA: la energía se conserva en el tiempo; $\frac{dE}{dt} = 0$.

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \|\dot{q}(t)\|^2\right) = \frac{1}{2} m \langle \nabla g(\dot{q}(t)); \ddot{q}(t) \rangle$

$= \frac{1}{2} m \langle 2\dot{q}(t); \ddot{q}(t) \rangle = m \langle \dot{q}(t), \ddot{q}(t) \rangle$

voy a usar ⊛; $v = (x, y, z)$.

$g(v) = \|v\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$; $\nabla g(v) = (2x, 2y, 2z) = 2v$.

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

$f(t) = \dot{q}(t)$

$\frac{dE}{dt} = m \langle \dot{q}(t), \ddot{q}(t) \rangle + \langle \nabla V(q(t)), \dot{q}(t) \rangle$

$= \langle \dot{q}(t), \underbrace{m\ddot{q}(t) + \nabla V(q(t))}_{=\vec{0}} \rangle = 0$.

por la 2da ley de Newton.

TAYLOR EN UNA VARIABLE

Def: $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo abierto, f es de clase C^k en I si todas las derivadas $f = f^{(0)}; f^{(1)} = f'; f^{(2)} = f'', \dots, f^{(k)}$ existen, y son continuas en el intervalo I.

$$\begin{cases} f^{(0)} = f \\ f^{(k+1)} = (f^{(k)})' \end{cases}$$

TEOREMA DEL DESAROLLO DE TAYLOR EN UNA VARIABLE

TEOREMA: Si f es de clase C^k en I, $a \in I$; existe un único polinomio $P(x)$ de grado $\leq k$ tal que $f^{(j)}(a) = P^{(j)}(a)$ para $j = 0, 1, 2, \dots, k$.

Explícitamente: $P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \to$ Polinomio de Taylor de orden k

y reescribimos $f(x) = P(x) + \boxed{R_k(x)} \to$ el resto de taylor de orden k

entonces: $\lim_{x \to a} \frac{|R_k(x)|}{|x-a|^k} = 0$.

Si $f \in C^{k+1}(I)$ existe $c \in (a,x)$ /

$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(c)\,(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} \Rightarrow \text{Resto en la forma de Lagrange}$$

Ejemplo: $f(x) = \operatorname{sen} x$

$a = 0$.

f es C^∞ (es C^k $\forall k$)

$f'(x) = \cos x$
$f''(x) = -\operatorname{sen} x$
$f'''(x) = -\cos x$
$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x = f$
$f^{V}(x) = \cos x$
$f^{VI}(x) = -\operatorname{sen} x$

$f(0) = 0$
$f'(0) = 1$
$f''(0) = 0$
$f'''(0) = -1$
$f^{IV}(0) = 0$

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } k \equiv 0 \pmod 4 \\ \cos x & \text{si } k \equiv 1 \pmod 4 \\ -\operatorname{sen} x & \text{si } k \equiv 2 \pmod 4 \\ -\cos x & \text{si } k \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$P_k(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + (-1)^j \frac{x^k}{k!} \ ; \ k = 2j+1.$$

$\operatorname{sen} x = P_k(x) + R_k(x)$ $\qquad c \in (0,x)$

y $|R_k| = \left| \dfrac{f^{(k+1)}(c)\, x^{k+1}}{(k+1)!} \right| \leq \dfrac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}$ $\quad$ (en este ejemplo: $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$)

en ESTE ejemplo, $R_k(x) \longrightarrow 0$ cuando $k \to +\infty$.

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}(-1)^j + \cdots$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j+1}(-1)^j}{(2j+1)!}$$ Serie de Taylor del seno. (serie de potencias)

Obs: $\operatorname{sen} x$ es una FUNCIÓN ANALÍTICA.

Ejemplo: $f(x) = e^x$; $f^{(k)}(x) = e^x$; $a = 0$; $f^{(k)}(0) = 1$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + R_k(x).$$

$$R_k(x) = \frac{e^c x^{k+1}}{(k+1)!} \ ; \ c \in (0,x).$$

si $x > 0 \Rightarrow 0 < R_k(x) \leq \dfrac{e^x x^{k+1}}{(k+1)!}$

si $x < 0 \Rightarrow |R_k(x)| \leq \ldots$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$ Serie de Taylor de e^x

$P(k) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_k(x-a)^k$

$p^{(j)}(a) = f^{(j)}(a) \iff a_j = \frac{f^{(j)}(a)}{j!} \quad \forall j = 0,1,2,\ldots,k.$

Si f es C^{k+1} $\Rightarrow f(x) = P(x) + R(x)$ con $R(x) = \frac{f^{(k+1)}(c)(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}$ y $c \in (a,x)$.

Fijados x y a; defino una función auxiliar:

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)(x-t)^2}{2} - \cdots - \frac{f^{(k)}(t)(x-t)^k}{k} - \frac{M(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}$$

donde M es una constante que se elige para que se cumpla la hipótesis del teorema de Rolle ~~para~~ en (a,x)

$g(a) = g(x) = 0$; Usamos Rolle $\Rightarrow \exists c \in (a,x)$ donde $g'(c) = 0$.

$$g'(t) = -\cancel{f'(t)} - \cancel{f''(t)(x-t)} + \cancel{f'(t)\cdot 1} - f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2} + \cancel{f''(t)(x-t)} \cdots$$

$$-\frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{k!} + f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1} + \cdots + \frac{M(x-t)^k}{k!} =$$

$$= \left[\frac{M - f^{(k+1)}(t)}{k!}\right](x-t)^k$$

$$\Rightarrow g'(c) = \left[\frac{M - f^{(k+1)}(c)}{k!}\right](x-t)^k = 0 \Rightarrow M = f^{(k+1)}(c).$$

Evaluamos en $t=a$.

$$0 = g(a) = f(x) - P(x) - \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-t)^{k+1}$$

$$\Rightarrow f(x) = P(x) + \boxed{\frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}}$$

Si f es C^k:

orden $k-1$ $\quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-a)$ donde $c \in (a,x)$ / por otro lado.

orden k $\quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_k(x)$.

resto:

$$0 = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-a)^k - \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k - R_k(x)$$

$$R_k(x) = \frac{[f^{(k)}(c) - f^{(k)}(a)]}{k!}(x-a)^k \quad \text{para algún } c \in (a,x)$$

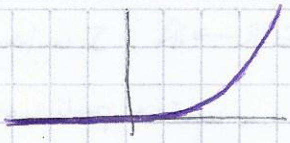
Si f es C^k

$$\Rightarrow \frac{|R_k(x)|}{|x-a|^k} = \left|\frac{f^{(k)}(c) - f^{(k)}(a)}{k!}\right| \longrightarrow 0 \text{ cuando } x \to a$$

Cuando $x \to a$, $c \to a$ $\Rightarrow f^{(k)}(c) \to f^{(k)}(a)$

Pues como f es C^k $f^{(k+1)}$ es continua.

Ejemplo: $g(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$



$\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x}}{x^k} = 0}_{\forall k \in \mathbb{N}}$

$g'(x) = \begin{cases} e^{-1/x}\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases}$ y $g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x}}{x} = 0$

~~…~~ g es C^∞: $g^{(k)}(0) = 0 \ \forall k$.

$f(x) = P_k(x) + R_k(x) \Rightarrow$ en este ejemplo $P_k(x) = 0$.

K fijo $\lim_{x\to 0} \frac{|R_k(x)|}{|x-0|^k} = 0$; $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x}}{|x|^k} = 0$.

En este ejemplo NO ES CIERTO: $R_k(x) \to (0)$ cuando $k \to \infty$.

$\Rightarrow$ (ESTA f NO ES IGUAL A SU SERIE DE TAYLOR.)

REPASO: Taylor en una variable

TEOREMA: Si $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; I intervalo abierto, $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$; $f \in C^k(I)$

Entonces existe un único polinomio $P_k(x)$ de grado $\leq k$ tal que $P_k^{(j)}(a) = f^{(j)}(a)$ para $j = 0, 1, 2, \dots, k$.

Explícitamente: $P_k(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot (x-a)^j$$

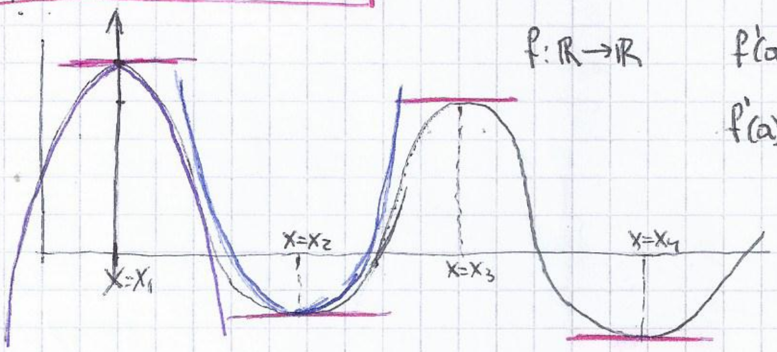
Si escribimos $f(x) = P_k(x) + R_k(x)$

Entonces (si f es C^k): $\lim_{x \to a} \frac{|R_k(a)|}{|x-a|^k} = 0$

Si $f \in C^{k+1}(I)$: $R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}$ con $c \in (a, x)$

Expresión de Lagrange del resto.

TAYLOR EN DOS VARIABLES



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f'(a) = 0$, $f''(a) > 0 \Rightarrow$ mínimo local

$f'(a) = 0$, $f''(a) < 0 \Rightarrow$ máximo local.

Ej: $f(x) = x^4$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ } en este caso, NO SIRVE

$P(x) = f(x_1) + \underbrace{f'(x_1)(x-x_1)}_{=0} + \frac{f''(x_1)}{2}(x-x_1)^2$

$f(x,y)$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$; $f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$

$(f_x)_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$; $(f_y)_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$

Ejemplo: $f(x,y) = xy^3$; $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = y^3$; $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 3xy^2$.

$f_{xx} = 0$; $f_{yy} = 6xy$; $\underbrace{(f_x)_y = 3y^2 \ ; \ (f_y)_x = 3y^2}$.

$f_{xy} = f_{yx} \Rightarrow$ esto sólo vale para funciones "BUENAS".

NOTA

Def: sea $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$; $(f_{x_i})_{x_j}$; $(f_{x_j})_{x_i}$.

- Una función $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, se dice de clase C^k si todas sus derivadas parciales de orden $\leq k$ existen y son continuas en Ω.
- f es C^∞ en Ω si f es C^k $\forall k$.

$f(x,y,z)$; $((f_x)_z)_y$; $((f_x)_y)_z$.

TEOREMA: Supongamos que f es de clase C^2 en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Entonces $(f_{x_i})_{x_j}(P) = (f_{x_j})_{x_i}(P)$, $\forall P \in \Omega$; $\forall\, 1 \leq i,j \leq n$.

- Si f es $C^3(\Omega)$: $((f_{x_i})_{x_j})_{x_k}(P) = ((f_{x_j})_{x_k})_{x_i}$

... etcétera.

Si f es C^2: $f_{xy}(P) = (f_x)_y(P)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

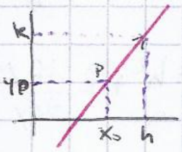
Si f es C^3: $f_{xyx} = ((f_x)_y)_x = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$

Si f es C^k: $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ $D^\alpha f$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k$; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0$

- $f(x,y)$; $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $P = (x_0, y_0)$; $f \in C^2$ (o $f \in C^3$), $x_0, y_0, h, k \in \mathbb{R}$, $v = (h,k)$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$g(t) = f(P + tv) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$

$g(t) = g(0) + g'(0)t + g''(0)\frac{t^2}{2} + \tilde{R}_2(t,v)$ → Desarrollo $g(t)$ en Taylor alrededor de $t=0$

$R_2(x) = \tilde{R}_2(1,v)$
$v = x - P$

- $g(0) = f(P)$, $g = f \circ \alpha$, $\alpha(t) = P + tv$

regla de la cadena.

$g'(t) = \langle \nabla f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle = \langle \nabla f(P+tv), v \rangle$

$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(P) \cdot k$.

$$g''(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{df}{dx}(P+tv)\right]\cdot h + \frac{d}{dt}\left[\frac{df}{dy}(P+tv)\right]\cdot k$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dx}\circ\alpha(t)\right)\cdot h + \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dy}\circ\alpha(t)\right)k$$

$$= \left\langle \nabla\left(\frac{df}{dx}\right)(\alpha(t)), \alpha'(t)\right\rangle\cdot h + \left\langle \nabla\left(\frac{df}{dy}\right)(\alpha(t)), \alpha'(t)\right\rangle\cdot k.$$

$$= \left[\frac{d^2f}{dx^2}(P+tv)\cdot h + \frac{d^2f}{dxy}(P+tv)\cdot k\right]\cdot h + \left[\frac{d^2f}{dxy}(P+tv)h + \frac{d^2f}{dy^2}(P+tv)\,k\right]k.$$

$$= \frac{d^2f}{dx^2}(P+tv)h^2 + 2\frac{d^2f}{dxy}(P+tv)hk + \frac{d^2f}{dy^2}(P+tv)k^2.$$

$$g(t) = f(P) + \underbrace{\left[\frac{df}{dx}(P)h + \frac{df}{dy}(P)k\right]}_{g'(0)}t$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{d^2f}{dx^2}(P)h^2 + 2\frac{d^2f}{dxy}(P)hk + \frac{d^2f}{dy^2}(P)k^2\right]\cdot t^2 + \tilde{R}_2(t).$$

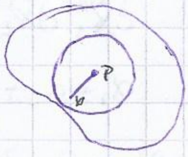
FINALMENTE evalúo en $t=1$

y recuerdo $g(1) = (P+tv)$.

TEOREMA DE TAYLOR EN 2 VARIABLES

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ de clase C^2 ; $P\in\Omega$, $v=(h,k)$

Supongamos $B(P,r)\subseteq\Omega$



Para $x = P+v$ con $\|v\| = r$.

$$f(x) = f(P) + \left[\frac{df}{dx}(P)\cdot h + \frac{df}{dy}(P)k\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{d^2f}{dx^2}(P)h^2 + 2\frac{df}{dxy}(P)hk + \frac{d^2f}{dy}(P)k^2\right] + R_2(x)$$

donde $\lim_{x\to P}\frac{|R_2(x)|}{\|x-P\|^2} = 0$.

$\|x-P\| = \|v\|$

$\tilde{R}_2(t,\lambda v) = \tilde{R}_2(\lambda t, v)$

pues $x = P+t(\lambda v) = P+(t\lambda)v$

$\lambda = \frac{1}{\|v\|}$; $t=1$.

$$R_2(x) = \tilde{R}_2(1,v) = \tilde{R}_2\left(\frac{t}{\|v\|}, \frac{\lambda v}{\|v\|}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{R_2(x)}{(t/\|v\|)^2} = \frac{\tilde{R}_2\left(\frac{t}{\|v\|}, \frac{\lambda v}{\|v\|}\right)}{\left(\frac{t}{\|v\|}\right)^2} = \frac{\|v\|^2\,\tilde{R}_2\left(\frac{t}{\|v\|}, \frac{\lambda v}{\|v\|}\right)}{t^2}$$

Si f es C^3:

$$R_2(x) = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3f}{dx^3}(c)h^3 + \frac{3d^3f}{dxy^2}(c)hk^2 + 3\frac{d^3f}{dx^2y}(c)h^2k + \frac{d^3f}{dy^3}(c)k^3\right]$$

$(h+k)^3 = h^3 + 3h^2k + 3hk^2 + k^3$

HOJA N°

FECHA

FORMAS CUADRÁTICAS.

- $Q_A(v) = ah^2 + 2bhk + ck^2$
  $= ah^2 + bhk + bkh + ck^2$

FORMA CUADRÁTICA EN 2 VARIABLES. $v = (h, k)$. Puedo asociarle una matriz.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \Rightarrow \text{MATRIZ ASOCIADA.}$$

1. $A = (a_{ij})$ es simétrica si $a_{ij} = a_{ji} \Rightarrow A^t = A$. $\forall i,j$

$$\langle Av, v\rangle = (Av)^t \cdot v = (v^t A) v = (h\ k) \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$
$$= (ah+bk \quad bh+ck) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$
$$= (ah+bk)h + (bh+ck)k = ah^2 + bkh + bhk + ck^2 = Q_A(v)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow \langle X, Y\rangle = Y^t X$$
$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A.$$

- $Q_A(h,k,l) = 5h^2 - 3k^2 + 8hl - 6kl$;

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} h & k & l \end{matrix} \\ \begin{matrix} h \\ k \\ l \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Def: Dada $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2, $P \in \mathbb{R}^n$

$H_p(f) = D^2 f(P) = Q_A \Rightarrow$ Hessiano de f en P.

donde A es la matriz simétrica de $n \times n$ formada por las derivadas parciales de segundo orden.

$$A = (a_{ij})\ ;\quad a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)$$

TEOREMA DE TAYLOR (General)

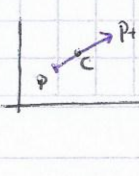
$f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2, $p \in \Omega$. Sea $r > 0 / B(P, r) \subseteq \Omega$; si $\|v\| < r$

$$f(p+v) = f(P) + \langle \nabla f(P), v\rangle + \frac{1}{2} H_p(f)(v) + R_2(v)$$

donde $\lim_{v \to 0} \frac{|R_2(v)|}{\|v\|^2} = 0$

$$f(P+v) = f(P) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \cdot v_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)\, v_i v_j + R_2(v)$$

Si f es C^3: $R_2(v) = \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(c)\, v_i v_j v_k$.



$c = P + \theta v$

$\theta \in (0,1)$.

NOTA

Ejemplo: $f(x,y) = e^{xy}$; $P=(0,0)$ es un punto crítico.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cdot e^{xy} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cdot e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2\cdot e^{xy} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2\cdot e^{xy} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) = e^{xy} + y\cdot x\cdot e^{xy}$$

$$f(0,0) = 1 \ ; \ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \ ; \ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_p(f)(v) = Q_A(v) = 2hk = hk + kh \ ; \ v = (h,k)$$

$$f(x,y) = 1 + xy + \underbrace{o(\|(x,y)\|^2)}_{\text{de orden más pequeño que } \|(x,y)\|^2}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$e^{xy} = 1 + xy + \frac{(xy)^2}{2} + \underbrace{o(\|(x,y)\|^4)}_{= R_4(x,y)} \text{ donde } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|R_4(x,y)|}{\|(x,y)\|^4} = 0.$$

Notación de multi-índice para las derivadas parciales:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

$$D^\alpha f(P) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}(P)$$

Ej: $\frac{\partial^5 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^1 \partial x_3^2}(P) = D^{(2,1,2)}f(P)$

Entonces puedo escribir Taylor así:

$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\cdots\alpha_n!$; $v^\alpha = v_1^{\alpha_1}\cdot v_2^{\alpha_2}\cdots v_n^{\alpha_n}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

Si f es C^k: $f(P+v) = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{D^\alpha f(P)}{\alpha!}\cdot v^\alpha + R_k(v)$; donde $\lim_{v\to 0}\frac{|R_k|}{\|v\|^k} = 0.$

Si $f \in C^{k+1}$: $R_k(x) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(c)}{\alpha!} v^\alpha$; $c = P + \theta v$

$\theta \in (0,1)$.

Ejemplo: $f(x,y,z)$.

$n=3$; $|\alpha|=0$. $\alpha=(0,0,0)$; $D^\alpha f(P) = f(P)$.

$K=2$; $|\alpha|=1$ $\begin{cases} \alpha=(1,0,0) & D^\alpha f(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P) \\ \alpha=(0,1,0) & D^\alpha f(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) \\ \alpha=(0,0,1) & D^\alpha f(P) = \frac{\partial f}{\partial z}(P) \end{cases}$

$|\alpha|=2$: $\alpha=(2,0,0) \longrightarrow D^\alpha f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) \longrightarrow v^\alpha = h^2$.

$\alpha=(0,2,0) \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ $\qquad \alpha! = 2! = 2$.

$\alpha=(0,0,2) \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

$\alpha=(1,1,0) \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial xy} \longrightarrow v^\alpha = h^1 k^1 l^0 = hk$.

$\alpha=(1,0,1) \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial xz}$ $\qquad \alpha! = 1!$

$\alpha=(0,1,1) \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial yz}$

$P=(x,y,z)$:

$$f(x+h, y+k, z+l) = f(P) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(P)h + \frac{\partial f}{\partial y}(P)k + \frac{\partial f}{\partial z}(P)l\right] +$$

$$+\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P)h^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P)k^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(P)l + \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(P)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial xz}(P)hl + \frac{\partial^2 f}{\partial yz}(P)kl\right]$$

$$+ R_2(x,y,z)$$

Acá ya no entendí una goma. Revisar.

REPASO

Def: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $P \in \mathbb{R}^n$; f es diferenciable en P $\Leftrightarrow$ existe una transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $f(x) = f(P) + T(x-P) + R(x)$

donde $\frac{|R(x)|}{\|x-P\|} \longrightarrow 0$ cuando $x \to P$.

En este caso, T es única y se nota $Df(P)$ (diferencial de f en P)

- ¿Cómo se acota una transformación lineal?

$A = [T]$, $A = (a_{ij})$, $T(x) = A \cdot x$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Def: $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$ Ej: $\left\|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}$

LEMA: Si $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal y $A = [T]$ es la matriz de T en la base canónica, entonces

$$\|T(x)\| = \|A \cdot x\| \leq \|A\| \, \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Dem: $A \cdot x = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; $(A \cdot x)_i = \langle A_i, x \rangle$; $\left\{ \begin{array}{l} |(Ax)_i| \leq \|A_i\| \cdot \|x\| \\ \text{Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz} \end{array} \right.$

donde $A_i = (a_{i1} \; a_{i2} \dots a_{in})$ la i-ésima fila de A.

$$\|A \cdot x\|^2 = \sum_{i=1}^{m} (A \cdot x)_i^2 \leq \sum_{i=1}^{m} (\|A_i\| \cdot \|x\|)^2$$
$$= \|x\|^2 \sum_{i=1}^{m} \|A_i\|^2$$
$$= \|x\|^2 \cdot \|A\|^2.$$

Tomo $\sqrt{\ }$:

$\Rightarrow \boxed{\|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|}$

Si f es diferenciable en P y $A = Df(P)$:

$$\|f(x) - f(P)\| = \|A \cdot (x-P) + R(x)\| \leq \|A \cdot (x-P)\| + \|R(x)\|$$
$$\leq \|A\| \cdot \|x-P\| + \varepsilon \|x-P\| \quad \text{si } \|x-P\| < \delta(\varepsilon)$$

$\left.\begin{array}{l} \frac{\|R(x)\|}{\|x-P\|} < \varepsilon \\ \text{si } \|x-P\| < \delta(\varepsilon) \end{array}\right\}$ $\boxed{\|f(x) - f(P)\| \leq (\|A\| + \varepsilon) \cdot \|x-P\| \quad \text{si } \|x-P\| < \delta(\varepsilon)}$

En particular,

f diferenciable en P $\Rightarrow$ f continua en P.

NOTA

HOJA Nº

FECHA

REGLA DE LA CADENA:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$; $h = g \circ f$; $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$; $h = g(f(x))$

si f es diferenciable en $p \in \mathbb{R}^n$ y g es diferenciable en $q = f(p) \in \mathbb{R}^m$

entonces h es diferenciable en P y $\boxed{Dh(P) = Dg(q) \circ Df(P)}$

$$[Dh(P)] = [Dg(q)] \cdot [Df(P)].$$

Dem: Sabemos que f es diferenciable en $P \Rightarrow f(x) = f(P) + T(x-P) + R_1(x)$

donde $T = Df(P)$ y $\dfrac{\|R_1(x)\|}{\|x-P\|} \to 0$ cuando $x \to P$.

y que g es diferenciable en $q \Rightarrow g(y) = g(q) + S(y-q) + R_2(y)$.

donde $S = Dg(q)$ y $\dfrac{\|R_2(\cancel{x})\|}{\|y-q\|} \to 0$ cuando $y \to q$ $\Rightarrow \dfrac{\|R_2(f(x))\|}{\|f(x)-q\|} \to 0$ cuando $x \to P$

$\to h(x) = g(f(x)) = h(P) + S(f(x)-q) + R_2(f(x))$

Sustituyo: (ojo: usar variables distintas para f y g).

$$h(x) = h(P) + S(T(x-P) + R_1(x)) + R_2(f(x))$$

$$= h(P) + S(T(x-P)) + \underline{S(R_1(x)) + R_2(f(x))},$$

$$= h(P) + (S \circ T)(x-P) + R(x)$$

usamos que como f es diferenciable, es continua $\Rightarrow$ cuando $x \to P$, $y = f(x) \to q$.

- Si probamos que $\dfrac{\|R(x)\|}{\|x-P\|} \to 0$ cuando $x \to P$,
  esto diría que h es diferenciable en P y $Dh(P) = S \circ T$, que es lo que dice el enunciado.

Recordamos que $R(x) = S(R_1(x)) + R_2(f(x))$.

$$\frac{\|R(x)\|}{\|x-P\|} \leq \frac{\|S(R_1(x))\|}{\|x-P\|} + \frac{\|R_2(f(x))\|}{\|x-P\|}$$

$$\leq \underbrace{(\|S\| + \varepsilon_1) \frac{\|R_1(x)\|}{\|x-P\|}}_{\text{si } \|x-P\| < \delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1)}, + \underbrace{\frac{\|R_2(f(x))\|}{\|x-P\|} \cdot \frac{\|f(x)-q\|}{\|x-P\|}}_{\text{si } f(x) \neq q},$$

Puedo tomar $\varepsilon_1 = 1$; si $f(x) = q \Rightarrow R_2(f(x)) = 0$.

Por lo cuento que hicimos antes $\dfrac{\|f(x)-q\|}{\|x-P\|} \leq \|T\| + \varepsilon_2$ si $\|x-P\| < \delta_2(\varepsilon)$

$\Longrightarrow$

NOTA

$$\frac{\|R_1(x)\|}{\|x-P\|} < \frac{\varepsilon}{2(\|S\|+\varepsilon_1)} \quad \text{si } \|x-P\| < \tilde{\delta}_1(\varepsilon).$$

$$\frac{\|R_2(f(x))\|}{\|f(x)-q\|} < \frac{\varepsilon}{2(\|T\|+\varepsilon_2)} \quad \text{si } \|x-P\| < \tilde{\delta}_2(\varepsilon).$$

$$\Rightarrow \frac{\|R(x)\|}{\|x-P\|} \leq \frac{\varepsilon}{2(\|S\|+\varepsilon_1)}\cdot(\|S\|+\varepsilon_1) + \frac{\varepsilon}{2(\|T\|+\varepsilon_2)}(\|T\|+\varepsilon_2) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

si $\|x-P\| < \min(\delta_1, \delta_2, \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2)$. ■

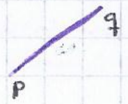
→ esto no suelen tomarlo en los finales porque es un bajón.

TEOREMAS EN $\mathbb{R}^n$ (Bolzano, Lagrange, Fermat)

Def: $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Si α es diferenciable en t y f es diferenciable en $\alpha(t) \Rightarrow f\circ\alpha$ es diferenciable en t y vale:

$$(f\circ\alpha)'(t) = Df(\alpha(t))\cdot(\alpha'(t))$$
$$= \langle \nabla f(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle$$

Ejemplo: $P, q \in \mathbb{R}^n$. $\alpha(t) = (1-t)\cdot P + tq$, $t\in[0,1]$. (curva como trayectoria)



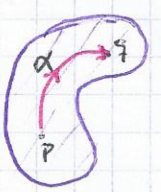
Parametriza el segmento de p a q

$Im(\alpha) = [P,q]$ (curva como dibujo)

$\beta(t) = (1-t^2)\cdot P + t^2 q$, $t\in[0,1]$, $Im(\beta) = [P,q]$

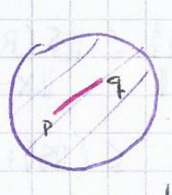
Def: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω se dice arco-conexo (conexo por arcos) si para todo par de puntos $p,q \in \Omega$ existe una curva continua en Ω que los une.

$(\forall p,q\in\Omega\ \exists \alpha:[0,1] \xrightarrow{\text{continua}} \Omega$ tal que $\alpha(0)=P$ y $\alpha(1)=q)$



Si

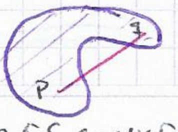
NO



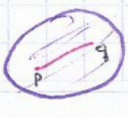
Si: una bola es arco-conexa

Def: $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ es convexo si $\forall P,q\in\Omega$ el segmento $[P,q] = \{x\in\mathbb{R}^n / x = (1-t)P + tq \text{ con } t\in[0,1]\} \subseteq \Omega$

obs: Ω convexo $\Rightarrow$ Ω arco-conexo.



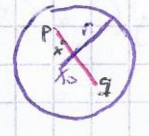
NO ES CONVEXO



CONVEXO

Ejemplo: Cualquier bola abierta en $\mathbb{R}^n$ es un convexo

$B = B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - x_0\| < r\}$



$x \in B$

Sean $p, q \in B$ quiero ver $[p,q] \subset B$.

Sea $x \in [p,q] \Rightarrow x = (1-t)p + tq$ para algún $t \in [0,1]$

quiero ver que $x \in B$

$\|x - x_0\| = \|[(1-t)p + tq] - [(1-t)x_0 + tx_0]\|$

$= \|(1-t)[p - x_0] + t[q - x_0]\|$

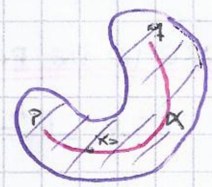
$\leq \|(1-t)(p - x_0)\| + \|t(q - x_0)\| \leq (1-t)\|p - x_0\| + t\|q - x_0\|$

$< (1-t)r + tr = r$.

* **TEOREMA DE BOLZANO EN $\mathbb{R}^n$**

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua

Si Ω es arco-conexo, $p, q \in \Omega$, $f(p) > 0$, $f(q) < 0$.



$\Rightarrow$ existe algún $x_0 \in \Omega / f(x_0) = 0$

Si Ω es convexo: $x_0 \in [p,q]$.

Dem: Como Ω es arco-conexo $\Rightarrow \exists \alpha: [0,1] \to \Omega$ continua $/ \alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$.

Sea $g = f \circ \alpha$, $g: [0,1] \to \mathbb{R}$. g es continua por la composición de funciones continuas.

$\left.\begin{array}{l} g(0) = f(p) > 0 \\ g(1) = f(q) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Por Bolzano en $\mathbb{R} \to \exists\ t_0 \in [0,1] / g(t_0) = 0$.

Sea $x_0 = \alpha(t_0) \in \Omega$, $f(x_0) = g(t_0) = 0$

Si el Ω es convexo puedo elegir α como $\alpha(t) = (1-t)p + tq$, $t \in [0,1]$.

$\Longrightarrow x_0 \in [p,q]$ ☒

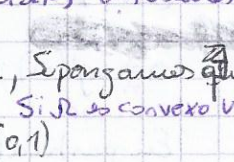
* **TEOREMA DE LAGRANGE EN $\mathbb{R}^n$:** (Ojo: Solo vale p/ funciones con valores en $\mathbb{R}$)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $f: \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciable. $p, q \in \Omega$, Supongamos que $[p,q] \subseteq \Omega$

Si Ω es convexo vale $\forall p, q \in \Omega$

entonces $\exists\ x_0 \in (p,q) / x_0 = (1-t_0)p + t_0 q$ para algún $t_0 \in (0,1)$

tal que $f(p) - f(q) = \langle \nabla f(x_0), q - p \rangle$



Dem (Lagrange): Sea $\alpha(t)=(1-t)p+tq$, $g=f\circ\alpha:[0,1]\to\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ g es derivable en $(0,1)$ y continua en $[0,1]$.

$g'(t)=\langle\nabla f(\alpha(t)),\alpha'(t)\rangle$ por la regla de la cadena

$=\langle\nabla f(\alpha(t)),q-p\rangle$

Por el teorema de Lagrange en una variable $\exists t_0\in(0,1)$: $\frac{g(1)-g(0)}{1-0}=g'(t_0)$

$g(1)=f(q)$

$g(0)=f(p)$

Sea $x_0=\alpha(t_0)$

$\Big\}$ $f(q)-f(p)=\langle\nabla f(\alpha(t_0)),q-p\rangle$
$=\langle\nabla f(x_0),q-p\rangle$ ☒

Def: $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $p\in\Omega$.

- f tiene en p un mínimo local (o relativo) si $\exists r>0/f(p)\leq f(x)\ \forall x\in\Omega$ con $\|x-p\|<r$
- f tiene en p un máximo local (o relativo) si $\exists r>0/f(p)\geq f(x)\ \forall x\in\Omega$ con $\|x-p\|<r$
- Si p es un máximo o mínimo local se llama un extremo local.

TEOREMA DE FERMAT EN $\mathbb{R}^n$

$f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $p\in\Omega^\circ$ (p en el interior de Ω)

- Si f tiene en p un extremo local y f es diferenciable en p entonces $\nabla f(p)=0$; $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)=0\ \forall i$
- Si f tiene en p un extremo local y $\exists$ la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ en la dirección de algún $\|v\|=1\to\frac{\partial f}{\partial v}(p)=0$.

Dem: sea $\alpha(t)=p+tv$; sea $g=f\circ\alpha$ $\xrightarrow{p,v}$

si f tiene un mínimo local en p: $g:(-r,r)\to\mathbb{R}$.

$g(0)=f(p)\leq f(\alpha(t))=g(t)$, $\forall t\in(-r,r)$ $(\Rightarrow\alpha(t)\in B(p,r)$ pues $\|\alpha(t)-p\|=\|t\cdot v\|$
$=|t|\cdot\underbrace{\|v\|}_{1}<r)$

$\Rightarrow$ g tiene en t=0 un mínimo local.

(si f tiene en p un máximo local $\Rightarrow$ g tiene en t=0 un máximo local) ☒

$0\underset{\text{Por Fermat en 1 var.}}{=}g'(0)\overset{\text{Por def. de derivada direccional.}}{=}\frac{\partial f}{\partial v}(p)$.

En particular, si f es diferenciable en p $\Rightarrow$ todas las derivadas direccionales existen y $\frac{\partial f}{\partial v}(p)=0$.

Eligiendo $v=e_j$: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(p)=0\ \forall j\Rightarrow\nabla f(p)=0$. ☒

Ejercicio: Sea $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1, $P = (1,0)$

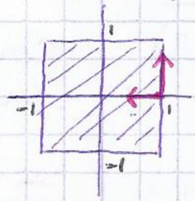
de final → Supongamos que $f/_Q$ (f restringida a Q) tenga un máximo absoluto

$\Rightarrow f(P) \geq f(x) \quad \forall x \in Q$

i) Probar que $\frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$

ii) Probar que $\frac{\partial f}{\partial x}(P) \geq 0$.

iii) ¿Se puede afirmar que $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = 0$? NO



$P \in \partial \Omega$.

iii) $f(x,y) = x$ cumple que $f(P) = 1 \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in Q$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 \neq 0$. $\Longrightarrow$ contraejemplo.

$v = (0,1)$

$g(t) = f(P + tv) = f(0, 1+t)$, $g'(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$.

$(0,1) \in Q \ \forall t$ con $|t| < 1$.

$f(0,1+t) \leq f(0,1) \ \forall t$ con $|t| < 1$.

$g(t) \leq g(0) \ \forall t$ con $|t| < 1$.

g tiene un máximo en $0 \in (-1,1) \xrightarrow[\text{1 var.}]{\text{por Fermat en}} g'(0) = 0 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{t \to 0} \frac{f(1,t) - f(0,1)}{t}$.

$v = (1,0)$ $\begin{array}{c} -1 \leq 1+t \leq 1 \\ -2 \leq t \leq 0 \end{array}$

$g(t) = f(P + tv) = f(1+t, 0)$, $t \in [-2, 0]$.

$g(t) \leq g(0)$, $g: [-2,0] \to \mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = g'(0) = \lim \frac{g(t) - g(0)}{t}$

si $t \in [-2, 0)$ $g(t) - g(0) \leq 0$

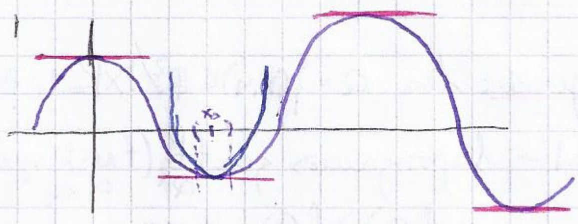
$t < 0$: $\frac{g(t) - g(0)}{t} \geq 0 \Longrightarrow \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \geq 0$. No entendí una goma.

Ejercicio ¿Qué pasaría si $\tilde{Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$?

EXTREMOS

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Si x_0 es un extremo local de $f \Rightarrow f'(x_0) = 0$



$$f(x) = f(x_0) + \cancel{f'(x_0)(x-x_0)} + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + R_2(x)$$

si $f'(x_0)=0$.

TEOREMA: Sea $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^2, $x_0 \in I^\circ$ tal que $f'(x_0) = 0$:

① Si $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ es un mínimo local estricto.
(existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(x_0)$ si $0 < |x - x_0| < \delta$)

② Si $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ es un máximo local estricto.
(existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(x_0)$ si $0 < |x - x_0| < \delta$)

Condiciones suficientes

Obs: si $f''(x_0) = 0$ el criterio no nos dice nada (la rotonda)

③ Si f tiene en x_0 un mínimo local $\Rightarrow f''(x_0) \geq 0$

④ Si f tiene en x_0 un máximo local $\Rightarrow f''(x_0) \leq 0$.

Condiciones necesarias.

Dem ① Escribimos el Taylor de orden 1 con resto de Lagrange.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2 \quad \text{donde } c \in (x_0, x), \; c = c(x)$$

Como f es $C^2 \Rightarrow f''$ es continua $\Rightarrow$ como $f''(x_0) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|y - x_0| < \delta$ entonces $f''(y) > 0$.

Usamos esto con $y = c(x) \Rightarrow f(x) > f(x_0)$ $\forall x$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ ☒

② Es similar.

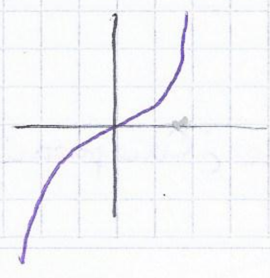
③ y ④ salen de ① y ②.

Ej: Dem de ③: Si no fuera $f''(x_0) \geq 0 \Rightarrow f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ por ② x_0 sería un máximo local estricto $\Rightarrow x_0$ no sería un mínimo local. ☒

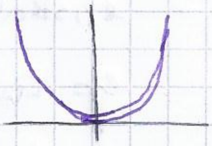
Ejemplo: $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, ~~$f''(x_0)=0$~~

$f'(x_0) = 0$, no es máximo ni mínimo local. De hecho f es estrictamente creciente.

(en ③ y ④ NO VALE la vuelta).



<u>Ejemplo</u>: $f(x)=x^4$, $x_0=0$. $f'(x)=4x^3$; $f''(x)=12x^2$



$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$.

x_0 ~~=0~~ es un mínimo local (y global) estricto

(en ① y ② NO VALE la vuelta)

<u>Recordamos cómo es el desarrollo de taylor de una función $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de clase C^2:</u>

$$f(x)=f(x_0)+\langle\nabla f(x_0),x-x_0\rangle+\frac{1}{2}H_{x_0}f(x-x_0)+R_2(x)$$

donde $H_{x_0}f(v)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x_0)\,v_iv_j$ ⇒ Hessiano de f en x_0.

y $\lim_{x\to x_0}\frac{|R(x)|}{\|x-x_0\|}=0$

Si $n=2$: $H_{x_0}f(v)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0)v_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x_0)v_1v_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0)v_2^2$

- Si f tiene en x_0 un extremo local ⇒ $\nabla f(x_0)=0$

<u>Clasificación de las formas cuadráticas de acuerdo al signo.</u>

$A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica: $a_{ij}=a_{ji}$

$Q_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$; $Q_A(v)=\langle Av,v\rangle=v^t\cdot A\cdot v=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}v_iv_j$

$n=2$: $A=\begin{pmatrix}a & c\\ c & b\end{pmatrix}$, $Q_A(x,y)=ax^2+2cxy+by^2$

$Q_A(\vec{0})=0$

<u>Def</u> ① A o Q_A se dicen <u>definidas positiva</u> si $Q_A(v)>0$ $\forall v\in\mathbb{R}^n$, $v\neq\vec{0}$

<u>ej</u>: $Q_A(x,y)=2x^2+3y^2$ $\quad A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

$Q_A(x,y,z)=x^2+8y^2+5z^2$. $\quad A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$

$Q_A(x,y)=3x^2+3y^2-2xy$

$=\underbrace{(x-y)^2}_{x^2-2xy+y^2}+2x^2+2y^2$ $\quad A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

② Q_A o A son <u>definidas negativas</u> si $Q_A(v)<0$ $\forall v\in\mathbb{R}^n$, $v\neq\vec{0}$

<u>ej</u>: $Q_A(x,y)=-x^2-y^2$. $\quad A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

NOTA

③ Q_A o A se dice semi-definida positiva si $Q_A(v) \geq 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n$ pero existe algún $v_0 \neq \vec{0} \ / \ Q_A(v_0) = 0$

ej: $Q_A(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2$; $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Q_A(v_0) = 0$

ej: $Q_A(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$Q_A(1,-1) = 0$

④ A o Q_A es semi-definida negativa si $Q_A(v) \leq 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n$ pero existe algún $v_0 \in \mathbb{R}^n \ / \ Q_A(v_0) = 0$

Ej $Q_A(x,y) = -x^2$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Q_A(v_0) = 0$

⑤ A o Q_A se dicen indefinidas si $\exists v_0, v_1 \in \mathbb{R}^n$, $v_0 \neq \vec{0}$, $v_1 \neq \vec{0}$ tales que $Q_A(v_0) > 0$ y $Q_A(v_1) < 0$

ej: $Q_A(x,y) = xy$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ $v_0 = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$

$Q_A(v_0) =$, $Q_A(v_1)$

$Q_A(x,y) = ax^2 + 2cxy + by^2$, $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$, $\Delta = \det(A) = ab - c^2$ (discriminante).

si $a \neq 0$:

$Q_A(x,y) = a\left[x^2 + \frac{2c}{a}xy + \frac{b}{a}y^2\right]$ $\qquad a = Q(1,0)$

$= a\left[\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 - \frac{c^2y^2}{a^2} + \frac{b}{a}y^2\right]$ $\qquad b = Q(0,1)$

$= a\left[\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab - c^2}{a^2}y^2\right]$

$\det(-A) = (-1)^n \det(A)$

TEOREMA: $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ una matriz simétrica de 2×2 ; $\Delta = \det(A) = ab - c^2$

① $a > 0$ y $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q_A$ (o A) es definida positiva.

② $a < 0$ y $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q_A$ (o A) es definida negativa.

$a \neq 0$ y $\Delta < 0 \Rightarrow A$ es indefinida (en 2×2).

obs: si $a=0 \Rightarrow Q(1,0)=0$.

obs: si $\Delta=0 \Rightarrow \exists\, v_0 \in \mathbb{R}^n,\ v_0 \neq \vec{0} : A\cdot v_0 = \vec{0} \Rightarrow Q_A(v_0) = \langle A v_0, v_0 \rangle = 0$.

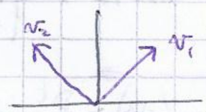
Def: un conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ en $\mathbb{R}^n$ se dice una base ortonormal si

① $\|v_j\| = 1 \quad \forall j$

② $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$

$v_i \perp v_j$

ej: $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$



base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

$P = (v_1\ v_2 \dots v_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$P^t = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$P^t \cdot P = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ ej: $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

TEOREMA: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica. Entonces existe una base ortonormal de autovectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de A.

$A v_j = \lambda_j v_j \quad (\lambda_j \in A)$.

$P = (v_1\ v_2 \dots v_n)$ $\quad P^t A P = P^{-1} A P = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = P D P^t$

$Q_A(v) = v^t A v = v^t (P D P^t) v$

$= (P^t v)^t D (P^t v) = Q_D(P^t v)$

$Q_D(v) = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \dots + \lambda_n v_n^2$

Q_A es definida positiva $\Leftrightarrow$ Q_D es definida positiva $\Leftrightarrow \lambda_k > 0\ \forall k$

Q_A es definida negativa $\Leftrightarrow$ Q_D es definida negativa $\Leftrightarrow \lambda_k < 0\ \forall k$

~~Ejemplo~~:

Ejemplo: $Q_A(x,y) = 2xy$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

$A \cdot v = \lambda v$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

si $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow x = y$.

si $\lambda = -1$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$; $y = -x$.

$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \longrightarrow$ $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$x = \frac{u-v}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$

$$2xy = 2\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right) = (u-v)(u+v) = u^2 - v^2 = 1 \cdot u^2 + (-1)v^2.$$

$\Rightarrow Q_A$ es definida negativa.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ A es definida positiva $\Leftrightarrow a_{11} > 0 \wedge \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0 \wedge \det(A) > 0$

$a_{ij} = a_{ji}$ A es def. negativa $\Leftrightarrow a_{11} < 0 \wedge \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0 \wedge \det(A) < 0$.

Condiciones necesarias para tener un extremo:

TEOREMA: $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de clase C^2 $p \in \Omega^\circ$, $\nabla f(p) = 0$ (p es un punto crítico).

$H_p f = Q_A$: $A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

① si P es un mínimo local de $f \Rightarrow H_p f(v) \geq 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n$

($H_p(f)$ es definido positivo o semidefinido positivo).

② si P es un máximo local de $f \to H_p f(v) \leq 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n$

($H_p(f)$ es definido negativo o semidefinido negativo).

Dem ① Suponemos p un mínimo local de f ($\exists r > 0 / f(p) \leq f(x) \ \forall x \in B(p,r)$)

dado $v \in \mathbb{R}^n$ puedo suponer $\|v\| = 1$

si v no tiene norma 1 escribo: $Q_A(v) = \|v\|^2 \cdot Q_A(\tilde{v})$

$g(t) = f(p + tv)$, $g: (-r, r) \to \mathbb{R}$

$(\|\tilde{v}\| = 1)$ $\tilde{v} = \frac{v}{\|v\|}$

g tiene en $t = 0$ un mínimo local.

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P+tv)v_i$$

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P+tv)v_iv_j$$

$$g''(0) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)v_iv_j = H_pf(v).$$

g tiene un mínimo local en $t=0 \Rightarrow g''(0) \geq 0$. (Por el teorema en 1 variable).

$\Downarrow$

$H_pf(v) \geq 0$.

② Sale igual (cambio $\leq$ por $\geq$).

Def: un punto P crítico de f ($\nabla f(P)=0$) se dice un punto de ensilladura si no es un extremo local.

Corolario: Si p es un punto crítico de $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2 y H_pf es indefinido $\Rightarrow P$ es un punto de ensilladura

Ejemplo: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2 + x^4 + y^6$, $P=(0,0)$

$H_pf(0,0)(x,y) = \frac{1}{2}(x^2-y^2)$.

Condiciones suficientes para tener un extremo.

TEOREMA: $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2, $p \in \Omega^\circ$. Suponemos que $\nabla f(P) = 0$.

$H_pf = Q_A$; $A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)\right)$.

① Si H_pf es definido positivo $\Rightarrow f$ tiene en P un mínimo local estricto.

② Si H_pf es definido negativo $\Rightarrow f$ tiene en P un máximo local estricto

LEMA: Si Q_A es definida positiva $\Rightarrow \exists c>0 / Q_A(v) \geq c \cdot \|v\|^2$

(Si Q_A es definida negativa $\Rightarrow Q_A(v) \leq -c\|v\|^2$)

Dem: $S = \{v \in \mathbb{R}^n / \|v\| = 1\}$ es cerrado y acotado (es un compacto).

Q_A es continua $\Rightarrow$ por Weierstrass $\exists c>0 : Q_A(v) \geq c \ \forall v$ con $\|v\|=1$.

con $c = Q_A(v_0) > 0$, $v_0 \in S$

Si v es cualquiera: $Q(v) = \|v\|^2 \, Q\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \geq c\|v\|^2$

Dem del teorema: $v = X - P$

$$f(x) = f(P) + \langle \cancel{\nabla f(P)}_{\nabla f(P)=0}, v \rangle + \underbrace{\frac{1}{2} H_P f(v)} + R_2(x)$$

Elijo $\varepsilon = \frac{c}{4}$ → c la del lema
para ese ε existe $\delta > 0$.

Sabemos que $\lim_{X \to P} \frac{|R_2(x)|}{\|X-P\|^2} = 0$ tal que $|R_2(x)| \leq \varepsilon \|v\|^2$

$$\frac{|R_2(x)|}{\|X-P\|} < \varepsilon \quad \text{si } \|x-P\| < \delta.$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(P) + \frac{1}{2} c \|v\|^2 - \varepsilon \|v\|^2$$

$$f(x) \geq f(P) + \left(\frac{c}{2} - \varepsilon\right) \|v\|^2 = f(P) + \frac{c}{4} \|v\|^2 > f(P)$$

si $X \neq P$ y $\|x - P\| < \delta \Rightarrow$ f tiene en P un mínimo local estricto. ▨

FUNCIÓN INVERSA

Def: $f: A \to B$ una función del conjunto A en B

1. f es inyectiva $\Leftrightarrow \forall x, y \in A,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
2. f es suryectiva $\Leftrightarrow \forall y \in B\ \exists x \in A \,/\, y = f(x)$
3. f es biyectiva (bi-unívoca) $\Leftrightarrow$ f es inyectiva y suryectiva.

Para todo $y \in B\ \exists!\, x \in A \,/\, f(x) = y$

Cuando f es biyectiva $\Rightarrow$ podemos definir la función inversa $f^{-1}: B \to A$

$\underset{y \in A}{f^{-1}(y)}$ = el único $x \in A$ tal que $y = f(x)$, $\cancel{\forall y \in A}$.

Ejemplo: $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f no es inyectiva: $f(2) = f(-2) = 4$

$\Rightarrow$ f no es biyectiva $\Rightarrow$ no tiene inversa.

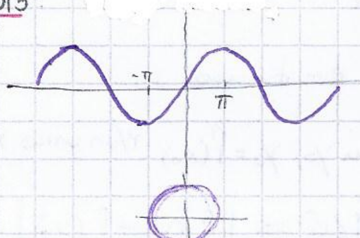
Ejemplo: $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es biyectiva.

$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$; $x^2 = y \Leftrightarrow x = +\sqrt{y}$.

obs: $f: A \to B$, $g: B \to A$, $g = f^{-1} \Leftrightarrow$ $f \circ g: B \to B$, $g \circ f: A \to A$; $f \circ g = id_B$, $g \circ f = id_A$.

donde $id_A: A \to A$, $id_A(x) = x\ \forall x \in A$.

Ejemplo:



$f(x) = \text{sen}\, x$

$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$

$f^{-1}: [-1, 1] \to \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$f^{-1}(y) = \text{arc sen}\,(y)$

$\text{sen}(\text{arcsen}\, y) = y\ \forall y \in [-1, 1]$

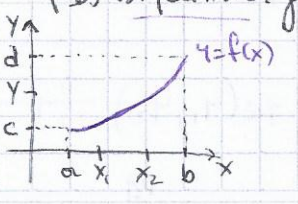
$\text{arc sen}(\text{sen}\, x) = x\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA EN UNA VARIABLE

Versión global: $f: [a, b] \to [c, d]$, f continua y estrictamente creciente (si $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$)

$f(a) = c$, $f(b) = d$ $\begin{pmatrix} a < b \\ c < d \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ f es biyectiva y $f^{-1}: [c, d] \to [a, b]$ es continua y estrictamente creciente.



obs: se aplica a $f(x) = x^2$; $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

$f = \text{sen}\, x$, $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$

NOTA

Dem: ① f es inyectiva si $x_1, x_2 \in [a,b]$ con $x_1 \neq x_2$

Puedo suponer $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ por ser f estrictamente creciente.
$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

② f es suryectiva: sea $y \in [c,d]$. puedo suponer $\underset{f(a)}{c} < y < \underset{f(b)}{d}$ (Pues $f(a)=c$ y $f(b)=d$)

$\tilde{f}(x) = y - f(x)$

$\left.\begin{array}{l}\tilde{f}(a) = y - c > 0 \\ \tilde{f}(b) = y - d < 0\end{array}\right\}$ como f (y por lo tanto $\tilde{f}$) es continua, puedo usar Bolzano.

$\cdot f(x) = y$ Por el teorema de Bolzano, existe $x_0 \in (a,b)$ tal que

$\Leftrightarrow 0 = y - f(x)$ $\tilde{f}(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = y$. luego, f es suryectiva.

$\boxed{\text{vimos } \forall y \in [c,d]\ \exists!\, x_0 \,/\, f(x_0) = y}$

Esto define una función inversa $f^{-1}: [c,d] \to [a,b]$

Queremos ver que f es estrictamente creciente y continua.

Sean $y_1, y_2 \in [c,d]$, $y_1 \neq y_2$ puedo suponer $y_1 < y_2$,

y sean x_1, x_2: $x_1 = f^{-1}(y_1) \Leftrightarrow y_1 = f(x_1)$

$x_2 = f^{-1}(y_2) \Leftrightarrow y_2 = f(x_2)$

Queremos ver que $x_1 < x_2$. Notemos $x_1 \neq x_2$, sea $y_1 = y_2$.

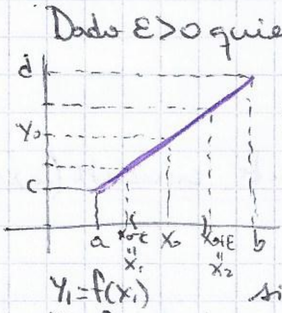
Si fuera $x_2 < x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow y_2 < y_1$ ABSURDO. Entonces $x_1 < x_2$.
por ser f estrictamente creciente.

Vimos que f^{-1} es estrictamente creciente.

Nos falta ver que $f^{-1}: [c,d] \to [a,b]$ es continua.

Sea $y_0 \in [c,d]$ quiero ver que f^{-1} es continua en y_0, $y_0 = f(x_0)$ p/un unico $x_0 = f^{-1}(y_0) \in [a,b]$

Dado $\varepsilon > 0$ quiero ver que $\exists \delta > 0 \,/\,$ si $|y - y_0| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$,
$f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$



$x_1 = \begin{cases} x_0 - \varepsilon & \text{si } x_0 - \varepsilon \in [a,b] \\ a & \text{si } x_0 - \varepsilon \notin [a,b] \end{cases}$

$x_2 = \begin{cases} x_0 + \varepsilon & \text{si } x_0 + \varepsilon \in [a,b] \\ b & \text{si } x_0 + \varepsilon \notin [a,b] \end{cases}$

$x_1 \leq x_0 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_0) \leq f(x_2)$.

$y_1 = f(x_1)$
$y_2 = f(x_2)$

si $y \in [y_1, y_2] \Rightarrow x = f^{-1}(y) \in [x_1, x_2] \Rightarrow f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y_2)$ ($y_1 \leq y \leq y_2$)

$\boxed{\text{si } x = f^{-1}(y) \in [x_1, x_2] \Rightarrow |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon}$.

sea $\delta < \min(y_0 - y_1, y_2 - y_0)$, si $|y - y_0| < \delta \Rightarrow y \in (y_1, y_2)$

$\Rightarrow x = f^{-1}(y) \in [x_1, x_2] \Rightarrow |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$.

<u>Dem:</u> Si f es decreciente y continua $\Rightarrow -f$ es creciente y continua

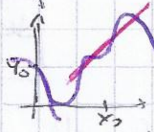
$(-f)(x) = -f(x)$. Se reduce a la versión anterior.

<u>Versión local:</u> $f: I=(\alpha,\beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 (es derivable en I y $f': I \to \mathbb{R}$ es continua).

Sea $x_0 \in I \,/\, f'(x_0) \neq 0$; $y_0 = f(x_0)$ ∴ Entonces $\exists$ un entorno U de x_0 ~~$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$~~

$U=(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subseteq I$ y un entorno $V=(y_0+\varepsilon, y_0+\varepsilon)$ tales que

$f|_U : U \to V$ es biyectiva y $(f|_U)^{-1}: V \to U$ es de clase C^1.



<u>Dem de la versión local:</u> Por hipótesis: $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x_0) > 0 \\ f'(x_0) < 0 \end{cases}$

Supongamos que $f'(x_0)>0$. Como f es $C^1 \Rightarrow f'$ es continua $\to \exists \delta > 0$ tal que

si $x \in \bar{U} = [x_0-\delta, x_0+\delta]$ entonces $f'(x)>0 \to f|_U: U \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente.

le aplico el teorema anterior (versión global)

$a = x_0-\delta$, $b = x_0+\delta$
$c = f(a)$, $d = f(b)$
$V = (c,d)$.

$\Rightarrow f|_U$ es biyectiva y $(f|_U)^{-1}: V \to U$ es continua.

Queremos ver que $(f|_U)^{-1}$ es C^1. Sean $y_0 \in V$, $F = f|_U$, $y = F(x)$

$$(F^{-1})'(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{F^{-1}(y)-F^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{F^{-1}(F(x))-F^{-1}(F(x_0))}{F(x)-F(x_0)} = ⊛$$

Como F y F^{-1} son continuas $x \to x_0 \Leftrightarrow y \to y_0$

$$⊛ = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{F(x)-F(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{F'(x_0)}$$ (recordar $F'(x_0)\neq 0$ si $x_0 \in U$)

Como F' es continua $\Rightarrow (F^{-1})'$ resulta continua $\Rightarrow F^{-1}$ es C^1

<u>Ejemplo sobre cómo derivar la inversa:</u>

$f(x) = \operatorname{sen} x$, $f: [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$, $f^{-1}(y) = \operatorname{arc\,sen} y$

$$(\operatorname{arc\,sen} y)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} \quad \text{donde } y = \operatorname{sen} x \qquad \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \end{cases}$$

$\cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$

$\operatorname{arc\,sen} y = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

<u>Otro ejemplo:</u> $f(x) = \tan x$, $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$; $f^{-1}(y) = \operatorname{arc\,tg} y$, $f^{-1}: \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{(\tan x)'} = \cos^2 x \quad \text{donde } y = \tan x \ ; \ \tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

$\operatorname{arc\,tg}(y) = \int_0^y \frac{1}{1+t^2}\, dt$

Recordar: Si $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal decimos que

T es inversible $\Leftrightarrow$ T es biyectiva $\Leftrightarrow$ T tiene una inversa.

En ese caso, necesariamente $n = m$.

Sea $A = [T]$ es la matriz de T en la base canónica $\Rightarrow [T^{-1}] = A^{-1}$

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

T es inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ (A es inversible o no singular)

$$\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}}$$

Ejemplo: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$,

$T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = A$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$

$\det(A) = 1(-1) - 1 \cdot 1 = -1 - 1 = -2 \neq 0$.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $F_2 \leftarrow F_2 - F_1$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$ $F_2 \leftarrow -\frac{1}{2} F_2$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$ $F_1 \leftarrow F_1 - F_2$.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$ $\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, $\det(A^{-1}) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} = \frac{1}{\det(A)}$.

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u+v}{2} \\ \frac{u-v}{2} \end{pmatrix}$

$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$

TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA EN $\mathbb{R}^n$. $f: \underset{\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ abierto.}}{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1

sea $x_0 \in \Omega$, $y_0 = f(x_0)$. Suponemos que $Df(x_0)$ es inversible $\left(\underbrace{J(x_0)}_{\text{Jacobiano de } f \text{ en } x_0} = \det[Df(x_0)] \neq 0\right)$

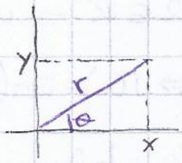
entonces existen un entorno U de x_0 ($U \subseteq \Omega$) y un entorno V de y_0 tales que

$f|_U : U \to V$ es biyectiva y $(f|_U)^{-1}$ de clase C^1.

$[D(f|_U)^{-1}(y_0)] = [Df(x_0)]^{-1}$

No se da la demostración de esto en esta materia.

Ejemplo:



$P(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$; $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

$P: A \longrightarrow B$

$$[DP(r,\theta)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$A = \{(r,\theta) / r>0,\ \theta \in (0, \frac{\pi}{2})\}$

$B = \{(x,y) / x>0,\ y>0\}$

$J(r,\theta) = \det[DP(r,\theta)] = r \neq 0$ si $r \neq 0$.

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

$\theta = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ si $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$P^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ \mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)$

$(x,y) \in B$.

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$; $A^{-1} = ?$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta & 1 & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \leftarrow \frac{F_1}{\cos\theta}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -r\tan\theta & \frac{1}{\cos\theta} & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \leftarrow F_2 - \mathrm{sen}\,\theta F_1]{}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -r\tan\theta & \frac{1}{\cos\theta} & 0 \\ 0 & r\cos\theta + r\tan\theta\,\mathrm{sen}\,\theta & -\tan\theta & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \leftarrow \frac{F_2\cos\theta}{r}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -r\tan\theta & \frac{1}{\cos\theta} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-\mathrm{sen}\,\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \leftarrow F_1 + r\tan\theta F_2]{}$$

pues $\tan\theta\,\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{\mathrm{sen}^2\theta}{\cos\theta}$; $= r\dfrac{\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta}{\cos\theta} = \dfrac{r \cdot 1}{\cos\theta}$

① $\dfrac{1}{\cos\theta} + r\tan\theta\left(\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}\right)$ $= \dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{\cancel{r}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta\,\cancel{r}}$ $= \dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{\mathrm{sen}^2\theta}{\cos\theta}$ $= \dfrac{1+\mathrm{sen}^2\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta} = \cos\theta$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \overset{①}{\cos\theta} & \mathrm{sen}\,\theta \\ 0 & 1 & -\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$$

$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{r}$.

② $\cancel{r}\tan\theta\dfrac{\cos\theta}{\cancel{r}} = \dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cancel{\cos\theta}}\cancel{\cos\theta} = \mathrm{sen}\,\theta$.

$$[DP^{-1}(x,y)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$(r,\theta) = P^{-1}(x,y)$.

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta$.

$\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{r\,\mathrm{sen}\,\theta}{r} = \mathrm{sen}\,\theta$.

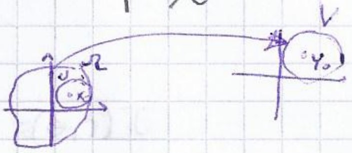
$\theta = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-r\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2}$$

$$= \frac{-\mathrm{sen}\,\theta}{r}.$$

REPASO: TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA.

Supongamos que $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es de clase C^1, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto, sea $X_0 \in \Omega$. Suponemos que $Df(x_0)$ es inversible ($\Leftrightarrow J(x_0) = \text{Det}(Df(x_0)) \neq 0$) entonces existen entornos U de X_0 ($U \subseteq \Omega$) y V de $Y_0 = f(x_0)$ talesque $f|_U : U \to V$ es biyectiva y $(f|_U)^{-1} : V \to U$ es de clase C^1



Más aún: $D(f|_U)^{-1}(y) = (Df(x))^{-1}$ donde $Y = f(x)$

obs: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ biyectiva; $g = f^{-1}$; $Y = f(x)$, $X = g(Y)$, si f y g son C^1

$f \circ g = g \circ f = id\,\mathbb{R}^n$

por la regla de la cadena
$$\left[\begin{array}{l} D(f\circ g)(Y) = Df(x) \circ Dg(Y) = id\,\mathbb{R}^n(Y) = Y \\ D(g\circ f)(x) = Dg(Y) \circ Df(x) = id\,\mathbb{R}^n(x) = X \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \boxed{Dg(Y) = Df(x)^{-1}}$$

FUNCIÓN IMPLÍCITA.

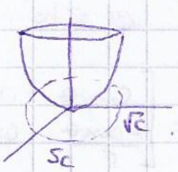
Def: Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La curva de nivel c de f es el conjunto
$$S_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = c\}$$

Ejemplo: $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$ $\qquad \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{c}$

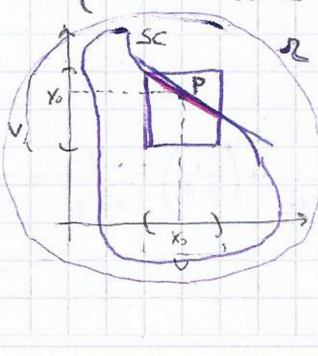
S_c = circunferencia de radio $\sqrt{c}$ centrado en el origen si $c > 0$

$S_0 = \{(0,0)\}$

$S_c = \emptyset$ si $c < 0$.



TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA (en $\mathbb{R}^2$). $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $P \in \Omega$. $P = (x_0, y_0)$, $c = f(P)$. Supongamos que $\frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$ entonces existen un entorno U de X_0, un entorno V de Y_0 y una función $\varphi: U \to V$ tales que si $(x,y) \in U \times V$,



$f(x,y) = c \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ $\quad ((x,y) \in S_c)$

(dentro del rectángulo $U \times V$ puedo despejar Y como función de X

$S_c \cap (U \times V)$ = gráfico de φ

NOTA

Obs: ~~A~~ en la situación del teorema: $f(x,\varphi(x)) = c \quad \forall x \in U$

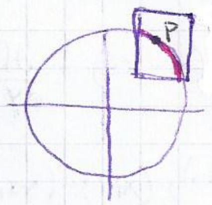
Por regla de la cadena

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) \cdot \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$$

$$\boxed{\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}}$$

Ejemplo: $c=1$, $f(x,y) = x^2+y^2$.

$S_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1\}$



$P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$x^2+y^2=1$

$y^2 = 1-x^2$

$y = \sqrt{1-x^2} = \varphi(x)$.

$\varphi'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$

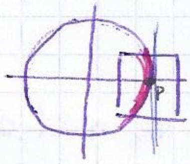
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$

$\varphi'(x) = -\frac{2x}{2y} = \frac{-x}{y} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$y=\varphi(x)$.

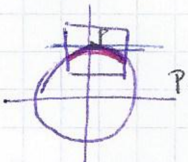
- $f(x,y) = x^2+y^2$ $\quad P=(1,0)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$ (el teorema como lo enuncié no se aplica)
  $c=1$

  $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2 \neq 0$.



existe un entorno de P donde $f(x,y)=1 \iff x = \tilde{\varphi}(y)$

$x^2+y^2=1 \iff x = \sqrt{1-y^2}$



$P=(0,1)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 2 \neq 0$

$f(x,y) = x^2+y^2$ $\quad$ ¡el teorema no se aplica!

$P=(0,0)$

$c=0$,

$\nabla f(0,0) = (0,0)$

$S_c = \{(0,0)\}$

Supongamos que estamos en la situación del teorema como lo enuncié.

¿Cuál es la recta tangente al gráfico de φ en P?

$$y = y_0 + \varphi'(x_0)(x - x_0) \qquad P = (x_0, y_0)$$

$$y = y_0 + -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0)$$

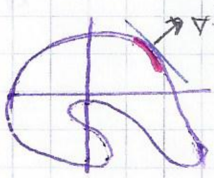
$$(y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) = 0$$

$$\langle \nabla f(x_0,y_0), (x,y) - (x_0,y_0) \rangle = 0$$

(ortogonal)

$\Rightarrow \nabla f(x_0,y_0)$ es perpendicular a la recta tangente al gráfico de φ en P



$\Rightarrow \nabla f(P)$

(vale si $\nabla f(p)$ pues entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(P) \neq 0$ o $\frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$ y si $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ puede despejar x y hacer la misma cuenta)

¿Qué pasa si $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$?

$S_c = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z)\}$ es la superficie de nivel c

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)} \end{cases} \quad \text{donde } (x,y) \in U,\ z = (\varphi, y)$$

Similarmente si $P \in S_c$ y $\nabla f(P) \neq 0$

$\Rightarrow$ el plano tangente a S_c en P es

$$\langle \nabla f(P), (x,y,z) - P \rangle = 0$$

$\nabla f(P)$ es ortogonal a S_c en P.

NO ESTABA DORMIDA

ESTABA EBRIA!

NOTA

Ejemplo: $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $P=(1,1,2)$, $f(p) = c = 6$.

S_c = esfera de radio $\sqrt{c}$ centrada en el origen

¿Cual es el plano tg a S_c en p?

$\nabla f(x,y,z) = (2x,2y,2z)$, $\nabla f(P) = (2,2,4)$.

$\langle (2,2,4), (x,y,z)-(2,2,4) \rangle$

$= 2(x-1)+2(y-1)+4(z-2) = 0$ $\Rightarrow$ forma implícita de la ecuación del plano

$= 2x-2+2y-2+4z-8 = 0$.

$4z = -2x-2y+12$

$z = \frac{-x}{2} - \frac{y}{2} + 3$ $\Rightarrow$ forma explícita.

otra forma:

$x^2+y^2+z^2 = 6 \Leftrightarrow z = \underbrace{+\sqrt{6-x^2-y^2}}_{g(x,y)}$ $\qquad g(1,1) = \sqrt{4} = 2$.

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$z = g(1,1) + \frac{\partial g}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1,1)(y-1)$.

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{6-x^2-y^2}}$ $\qquad \frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = \frac{-1}{2}$

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{6-x^2-y^2}}$ $\qquad \frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = \frac{-1}{2}$.

$\Rightarrow z = 2 + \left(\frac{-1}{2}\right)(x-1) + \left(\frac{-1}{2}\right)(y-1) = 3 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$

$\boxed{\text{Maximizar o minimizar}}$ $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$

$g(x) = c$ $\quad f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

sujeta a

$g(x) \leq c$.

Ejemplo en $\mathbb{R}^2$: maximizar xy

sujeta a la restricción $x^2+y^2=1$

$f(x,y) = x \cdot y \quad g(x,y) = x^2+y^2, \quad S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / g(x,y) = 1\}$

S es un compacto
f es continua $\Longrightarrow f/_S$ tiene algún máximo

$S = S^+ \cup S^-$ $\quad S^+ = \{(x, \sqrt{1-x^2}) / x \in [-1,1]\}$

$S^- = \{(x, -\sqrt{1-x^2}) / x \in [-1,1]\}$

$h(x) = x\sqrt{1-x^2} \quad h : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

h será máxima en $x = x_0 \Leftrightarrow h^2$ lo es

$l(x) = h^2(x) = x^2(1-x^2) = x^2 - x^4 \quad l'(x) = 2x - 4x^3$

$l'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 4x^3 \Leftrightarrow x = 0$

ó

$l(x)$ tiene los ptos críticos: $\quad x^2 = 1/2 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$l(0) = 0,$
$l(1) = l(-1) = 0$ $\Longrightarrow$ l y por lo tanto h alcanza el máximo en $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$l(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$h(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$.

$f/_S$ alcanza el máximo en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ que es $\frac{1}{2}$.

en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ se alcanza el mínimo de f que es $\frac{-1}{2}$.

TEOREMA DEL MULTIPLICADOR DE LAGRANGE. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, clase C^1

Supongamos que queremos maximizar o minimizar $f(x)$ sujeta a la condición $x \in S_c = \{x \in \mathbb{R}^n / g(x) = c\}$.

Si $f/_{S_c}$ tiene en punto P un máximo o mínimo (local)

y $\nabla g(P) \neq 0$, entonces $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ (el multiplicador de Lagrange)

tal que $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$

Eu el ejemplo de antes: $f(x,y) = xy$

$g(x,y) = x^2+y^2 = 1 \quad (c=1)$

$\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \neq (0,0)$ si $(x,y) \in S_1$

$\nabla f(x,y) = (y, x)$. Si en $P=(x_0,y_0)$ se alcanza el máximo $\Rightarrow$ por el ~~teorem~~ teorema

existe $\lambda \in \mathbb{R}$: $\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$

$y_0 = 2x_0\lambda$ $\qquad \dfrac{y_0}{2x_0} = \lambda = \dfrac{x_0}{2y_0}$ $\qquad 2y_0^2 = 2x_0^2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y_0^2 = x_0^2$

$x_0 = 2y_0\lambda$

$x_0^2 + y_0^2 = 1$ $\qquad 2x_0^2 = 1$ $\qquad \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\qquad \lambda = \pm\dfrac{1}{2}$

$\qquad\qquad\qquad\quad x_0^2 = 1/2$

TEOREMA DEL MULTIPLICADOR DE LAGRANGE.

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, clase C^1, $f(x)$ sujeta a la condición $x\in S_c=\{x\in\mathbb{R}^n / g(x)=c\}$

Si f/S_c tiene un punto P con máximo o mínimo local y $\nabla g(P)\neq 0$

entonces $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ (el multiplicador de Lagrange) tal que $\nabla f(P)=\lambda\nabla g(P)$.

Recordemos que el plano tg a S_c en P_0 es perpendicular a $N=\nabla g(P_0)$

$X\in$ plano tg $\iff \langle x-P, N\rangle=0$.

En el plano tg: $T_pS=\{v\in\mathbb{R}^n / \langle v,N\rangle=0\}$ subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$

$= P+T_pS_c$

LEMA: Supongamos $N=\nabla g(P)\neq\vec{0}\Rightarrow$

$T_pS_c=\{v\in\mathbb{R}^n / \exists$ una curva $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $\alpha(0)=P, \alpha'(0)=v \wedge \alpha(t)\in S_c\ \forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon)\}$

Dem: $T_pS_c=\{v\in\mathbb{R}^n / \langle v,N\rangle=0\}$

$\widetilde{T_pS_c}=\{v\in\mathbb{R}^n / \exists$ curva $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^n$ de C^1 tal que $\alpha(0)=P$, $\alpha'(0)=v$ y $\alpha(t)\in S_c\ \forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon)\}$

Veamos que $\widetilde{T_pS_c}\subseteq T_pS_c$:

Sea $v\in\widetilde{T_pS_c} / g(\alpha(t))=c$ (constante) $\forall t$

Usando la regla de la cadena,

$\langle\nabla g(\alpha(t)),\alpha'(t)\rangle=0$

Con $t=0$: $\langle\nabla g(P),\alpha'(0)\rangle=0$

$\langle N,v\rangle=0\Rightarrow v\in T_pS_c$

Veamos que $T_pS_c\subseteq\widetilde{T_pS_c}$

Sea $v/\langle v,N\rangle=0$, como $\nabla g(P)\neq 0\Rightarrow\exists j\in[1,n]:\frac{\partial g}{\partial x_j}(P)\neq 0$.

Podemos suponer $\frac{\partial g}{\partial x_n}(P)\neq 0$.

$\Rightarrow\exists$ entorno U de $\tilde{P}=(P_1\dots P_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$, entorno V de P_n y una función $\varphi:U\to V$ de clase C^1

tal que si $X=(x_1,\dots,x_n)\in U\times V\Rightarrow g(x_1,\dots,x_n)=c$ (teo. de la función implícita).

$\iff x_n=\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})$

Sea $v / \langle v, N\rangle = 0$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, considero $\tilde{v} = (v_1, \dots, v_{n-1})$

Sea $P = (P_1, \dots, P_n)$ y $\tilde{P} = (P_1, \dots, P_{n-1})$

defino $\alpha(t) = (\tilde{P} + t\tilde{v}, \varphi(\tilde{P} + t\tilde{v})) \in S_c$, si $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Si calculo $\alpha(0) = (\tilde{P}, \varphi(\tilde{P})) = P$

$\alpha'(t) = (\tilde{v}, \circledast)$ como φ es de $n-1$ variables...

$\circledast = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\tilde{P} + tv) v_j$ (por regla de la cadena)

Encuentro a cualquier $P / t = 0$,

$$\alpha'(0) = \left(\tilde{v}, \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\tilde{P}) \cdot v_j\right) = \left(\tilde{v}, \sum_{j=1}^{n-1} \left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial x_j}(P)}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(P)}\right) \cdot v_j\right)$$

componente de ∇g

$N = \nabla g(P)$, $N = (N_1, \dots, N_n)$

$$= \tilde{v}, \sum_{j=1}^{n-1} \left(-\frac{N_g(P)}{N_n(P)}\right) \cdot v_j$$

Queremos ver que $\sum_{j=1}^{n-1} \left(-\frac{N_g}{N_n}\right) \cdot v_j = v_n$ (porque $\alpha'(0) = v$)

Para esto, uso la hipótesis

Como $\langle v, N\rangle = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (v_j N_j) = 0$ $\Rightarrow$ def. de prod. escalar.

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{-N_g}{N_n}\right) \cdot v_j = -\frac{1}{N_n} \sum_{j=1}^{n-1} N_j v_j = \cancel{-\frac{1}{N_n}}$$

$$-\frac{1}{N_n} \cdot (-N_n v_n) = v_n$$

$\Rightarrow T_p S_c \subseteq \hat{T}_p S_c$ No se toma en el final.

- demostración del teorema de Lagrange.

Vamos a ver que: $\frac{\partial f}{\partial v}(P_0) = 0 \ \forall v \in T_{P_0} S_c$

Supongamos que $f/_{S_c}$ tiene un máximo o mínimo en P.

Si v vive en el plano tg $\Rightarrow$ por el lema:

$\exists \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n / \alpha(0) = P_0$, $\alpha'(0) = v \wedge \alpha(t) \in S_c \ \forall t$.

$f(\alpha(t)) \leq f(P_0)$ si f tiene en P_0 un mínimo local.

o $f(\alpha(t)) \geq f(P_0)$ si f tiene en P_0 un máximo local.

$\longrightarrow$

$\Rightarrow f \circ \alpha$ tiene en $t=0$ un máximo o mínimo local.

$\Rightarrow (f\circ\alpha)'(0)=0$

$(f\circ\alpha)'(t) = \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle$ por regla de la cadena.

en $t=0$: $(f\circ\alpha)'(0) = \langle \nabla f(\alpha(0)), \alpha'(0) \rangle$

$= \langle \nabla f(P_0), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(P_0)$ pues f es diferenciable

$$(*)\begin{cases} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(P_0) = 0 \\ \text{o } \langle \nabla f(P_0), v \rangle = 0 \quad \forall v \in T_p S_c \end{cases}$$

Tenemos a $N = \nabla g(P_0)$ y $W = \nabla f(P_0)$

$W = W_1 + W_2$ donde $\underbrace{W_1 /\!/ N}_{\to W_1 = \lambda N}$ y $W_2 \perp N$

Aplico $(*)$ a $v = W_2 \in T_p S_c$

$\langle \nabla f(P_0), W_2 \rangle = 0$

$\langle W_1 + W_2, W_2 \rangle = 0$

$\langle W_1, W_2 \rangle + \langle W_2, W_2 \rangle = 0$. Como $W_1 \perp W_2 \Rightarrow \langle W_1, W_2 \rangle = 0$

$0 \quad + \langle W_2, W_2 \rangle = 0$

$\|W_2\|^2 = 0$

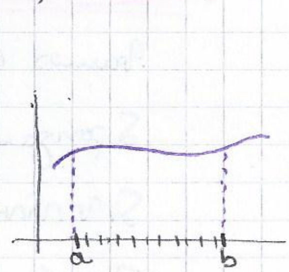
$\Rightarrow W_2 = 0$

$\Rightarrow W = W_1 \Rightarrow \nabla f(P_0) = \lambda v = \lambda \nabla g(P_0)$.

INTEGRALES

Def: Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada (y por lo general continua)

si $f(x) \geq 0$ y continua:



Una partición π de $[a,b]$ es un conjunto de puntos donde

al primer punto $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$

buscaré $m_i = \text{Inf } f(x) \qquad \text{Inf}_{x \in [x_{i-1}, \dots x_i]} f(x)$

$M_i = \text{Sup } f(x) \qquad \text{Sup}_{x \in [x_{i-1}, \dots x_i]} f(x)$

Existe siempre si f es acotada

$\Rightarrow$

Fijada una partición π de $[a,b]$ y dada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada, definimos su Suma inferior de Riemann.

$s_\pi(f)=\sum_{i=1}^{k-1} m_i\,\Delta x_i$, donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Suma Superior:

$S_\pi(f)=\sum_{i=1}^{k-1} M_i\,\Delta x_i$, donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

¡Aproximaciones groseras!

Def: Integral Inferior: $I=\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s_\pi(f)/\pi$ es una partición de $[a,b]\}$

Integral Superior: $S=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S_\pi(f)/\pi$ es una partición de $[a,b]\}$.

Def: f es integrable (en el sentido de Riemann) en $[a,b]$

si $I=S$ y lo notamos $\int_a^b f(x)\,dx$

Nota: Hay funciones que no cumplen esto.

TEOREMA: Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua en un intervalo cerrado $\Rightarrow$ es integrable en $[a,b]$ demo. en el Larotonda.

obs: $s_\pi(f)\le S_\pi(f)$

* CRITERIO DE INTEGRABILIDAD.

f es integrable en $[a,b] \Leftrightarrow \exists$ una sucesión (π_n) de particiones de $[a,b]$ tales que $S_{\pi_n}(f)-s_{\pi_n}(f)\longrightarrow 0$ cuando $n\to\infty$

Además de esta situación, si $S_{\pi_n}(f)\longrightarrow l \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = l$.

- Calcularemos una integral con la definición:

$\int_0^1 x\,dx$, tomo particiones, tomo la partición uniforme

π_n part. unif. de $[0,1]$. $\quad 0 \quad 1/n \quad 2/n \quad \frac{n-1}{n} \quad 1 \qquad x_i=\frac{i}{n}$

$f(x)=x$, $s_\pi(f)$ Como f es creciente $\Rightarrow$ $m_i = f(x_{i-1})$
si f es creciente $\quad M_i = f(x_i)$

si f es decreciente, en este caso: $m_i = x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$

$M_i = x_i = \frac{i}{n}$

Como la part. es uniforme: $\Rightarrow \Delta x_i = \frac{1}{n}$.

$s_\pi(f) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$ cuando $n \to \infty$

$S_\pi(f) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$ cuando $n \to \infty$.

- Otra integral calculada con la definición de integral:

$f(x) = x^2$, $\int_0^1 x^2\,dx$, creciente.

Usando la def. de integral:

$s_\pi(f) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\frac{1}{n}$

$S_\pi(f) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$.

Al ser la integral un límite, veamos un caso en el que funcione la cosa y otro en el que no funciona.

Uso definición de integrabilidad en f no integrable.

Si tomamos algo como:

$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ Función discontinua en un punto, f discontinua

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$, $f\,[0,1] \longrightarrow 1$

¿Qué pasa si integro en el $[0,1]$?

$s_\pi(f) = 0$, $S_\pi(f) = \sum_{i=1}^{n} 1\,x_i = 1$

$m_i = 0$ $M_i = 1$.

La integral inferior para esta función es cero: $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$

La integral superior para esta función es uno: $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$

$\Rightarrow$ luego,

f no es integrable.

Teorema fundamental del cálculo

Parte 1: Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, y defino $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, entonces F es derivable en (a,b) y $F'(x)=f(x)\ \forall x\in(a,b)$

Parte 2: Regla de Barrow.

Dada una función, si tengo una integral $\int_a^b g(x)\,dx$ con g continua y $\exists G:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) / $G'(x)=f(x)\ \forall x\in(a,b)$ (será primitiva de g) $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx = G(b)-G(a)$

Se toma en los finales

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL cálculo

1. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada e integrable en $[a,b]$. Sea $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

si en un punto $x_0\in(a,b)$ f es continua $\Rightarrow$ f es derivable en x_0

y $F'(x_0)=f(x_0)$.

2. Regla de Barrow. Supongamos que $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una primitiva de $f(x)$

(G es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $G'(x)=f(x)$ $\forall x\in(a,b)$),

entonces $\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a)$.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL.

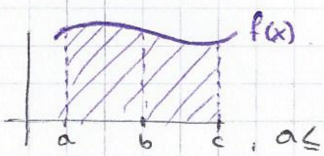
1. Linealidad respecto de la función:

$$\int_a^b (f_1+f_2)(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx$$

$$\int_a^b (\lambda\cdot f)(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx \qquad (\lambda\in\mathbb{R})$$

2. Aditividad respecto del intervalo

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$



, $a\leq b\leq c$.

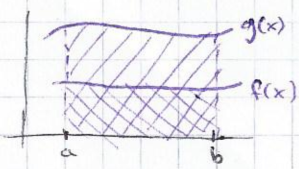
$$\int_a^a f(x) = 0 \quad ; \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$a>b$.

3. Monotonía.

si $f(x)\leq g(x)$, $\forall x\in[a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$



Ejemplo: si $m, M\in\mathbb{R}$; $m\leq f(x)\leq M$

$$\Rightarrow m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a)$$

4. Desigualdad triangular para integrales.

$$-|f(x)|\leq f(x)\leq |f(x)| \ \forall x\in[a,b]$$

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b f(x)\,dx$$ $a\leq b$ desigualdad triangular.

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|$$ a y b en cualquier orden.

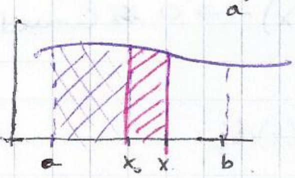
NOTA

5. $\int_a^b \lambda\,dx = \lambda(b-a)$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

Prueba del teorema Fundamental del Cálculo.

Dem 1. Queremos ver que $F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$ por la propiedad de aditividad respecto al intervalo



$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = \left|\left(\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt\right) - f(x_0)\right|$$

$$= \left|\left(\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt\right) - \left(\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)\,dt\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))dt\right|$$ por la linealidad de la integral.

$$\leq \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|\,dt\right|$$ por la desigualdad ~~integral~~ triangular para integrales

$$= \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|dt\right| < \varepsilon \text{ si } |x-x_0| < \delta$$

$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$

Por hipótesis, f es continua en $x_0 \Rightarrow$ dado $\varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 / |t - x_0| < \delta \Rightarrow$ entonces $|f(x_0) - f(t)| < \varepsilon$. Luego; si $x > x_0$:

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|x-x_0|}\int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|\,dt$$

$$\leq \frac{1}{|x-x_0|}\int_{x_0}^x \varepsilon\,dt = \frac{1}{x-x_0}\varepsilon(x-x_0) = \varepsilon.$$

si $x < x_0$:

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\right| \leq \frac{1}{x_0-x}\left|-\int_x^{x_0} |f(t)-f(x_0)|dt\right| \leq \frac{1}{x-x_0}\left(\int_x^{x_0}\varepsilon\,dx\right) = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

2. Sea $H(x) = G(x) - F(x)$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow H(x) = c\ \forall x \in (a,b)$ donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante.

(Sale por el teorema de Lagrange: $x_1\ x_2$ $H(x_1) - H(x_2) = H'(c)(x_1 - x_2)$ con $c \in (x_1, x_2)$ $= 0\ \ \forall x_1, x_2 \in (a,b)$

$$\Rightarrow \boxed{G(x) = c + \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x \in (a,b)} \ (*).$$

Hago $x \to a$, $G(x) \to G(a)$ por la continuidad de G.

$\int_a^x f(t)dt \longrightarrow 0$

$\left(\begin{array}{l} \text{Como } f \text{ es continua, } \Rightarrow |f(x)| \leq M \text{ por el teorema de Weierstrass.} \\ \left|\int_a^x f(t)dt\right| \leq \int_a^x |f(t)|dt \leq \int_a^x M dt = M(x-a) \longrightarrow 0 \text{ si } x \to a \end{array} \right.$

en (*) hacemos $x \to b$: $\int_a^x f(t)\,dt \longrightarrow \int_a^b f(t)dt$. ($F$ es continua).

$$\left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^b f(t)dt\right| = \left|\int_x^b f(t)\,dt\right| \leq M(b-x) \longrightarrow 0 \text{ cuando } x \to b$$

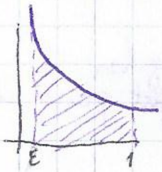
$$G(b) = C + \int_a^b f(t)\,dt \Rightarrow G(b) = G(a) + \int_a^b f(t)dt.$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) \quad \blacksquare$$

INTEGRALES IMPROPIAS.

Ej: $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha}dx$

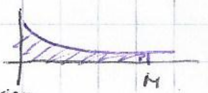
$\displaystyle\int x^{-\alpha}dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} + cte$ $\quad \alpha \neq 1$



$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)$$

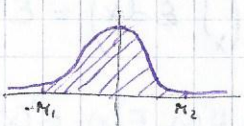
$$\begin{cases} = \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{si } 0 < \alpha < 1 \quad \text{la integral impropia converge} \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1 \quad \text{la integral diverge} \end{cases}$$

Ejemplo. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{M \to \infty} \int_0^M e^{-x}dx = \lim_{M \to \infty} -e^{-x}\Big|_0^M = \lim_{M \to \infty} \left(-e^{-M} - (-1)\right) = 1$



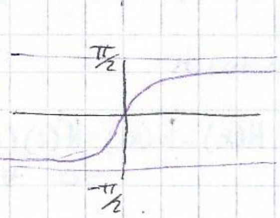
Def $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{M \to \infty} \int_0^M f(x)dx$ $\quad$ f continua en $[0, M]$

Ejemplo: $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x}\,dx = \lim_{\substack{M_1 \to +\infty \\ M_2 \to +\infty}} \int_{M_1}^{M_2} \frac{1}{1+x}\,dx$

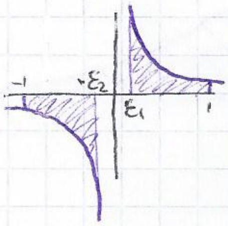


$$= \lim_{\substack{M_1 \to \infty \\ M_2 \to \infty}} \operatorname{arctg}(M_2) - \operatorname{arctg}(-M_1)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$



Ejemplo: $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\int_{-1}^{1}x^{-1/3}dx=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon_2}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx+\int_{\varepsilon_1}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx\right)$



$$=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\left(\frac{(-\varepsilon_2)^{2/3}}{2/3}-\cancel{\frac{(-1)^{2/3}}{2/3}}+\cancel{\frac{1^{2/3}}{2/3}}-\frac{\varepsilon_1^{2/3}}{2/3}\right)\quad =0 \text{ si } \varepsilon_1=\varepsilon_2 .$$

$$(-1)^{2/3}=\sqrt[3]{(-1)^2}=\sqrt[3]{1}=1$$

Ejemplo: $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon_2}\frac{1}{x}dx+\int_{\varepsilon_1}^{1}\frac{1}{x}dx\right)$ $\qquad\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=\log x+C$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\left(\log\varepsilon_2-\log 1+\log 1-\log\varepsilon_1\right)=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0^+\\ \varepsilon_2\to 0}}(\log\varepsilon_2-\log\varepsilon_1)$$

$\displaystyle\Longrightarrow\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx=0$ como valor ~~propio~~ principal.

Ejemplo: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dx\ ;\quad g(x)=\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ $\qquad g(x)\geq 0.$

$$=\lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{M}g(x)dx.$$

$$=\sup_{M>0}\int_{-M}^{M}g(x)dx\iff\exists C>0 \text{ tal que }\int_{-M}^{M}g(x)dx\leq C$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\underset{\text{si } x>0}{\Longrightarrow}\ e^x\geq\frac{x^k}{k!}\quad\forall k\geq 0$$

$$e^{-x^2/2}=\frac{1}{e^{x^2/2}}\leq\frac{1}{\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^k}{k!}}=\frac{k!\,2^k}{x^{2k}}.$$

$$=\int_{-M}^{M}g(x)dx=2\int_{0}^{M}g(x)dx=2\left(\underbrace{\int_0^1 g(x)dx}_{\in\mathbb{R}}+\int_1^M g(x)dx\right)$$

g es par. $\quad g(x)=g(-x)$ $\qquad\in\mathbb{R}$ pues g es continua en $[0,1]$

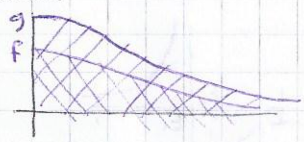
$$\int_1^M g(x)dx\leq k!\,2^k\int_1^M\frac{1}{x^{2k}}dx\qquad\int x^{-2k}dx=\frac{x^{-2k+1}}{-2k+1}+C$$

$$\leq k!\,2k\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{M^{1-2k}}{2k-1}\right)\longrightarrow\frac{k!\,2k}{2k-1}\quad\text{cuando } M\to\infty \text{ si } k\geq 1$$

Criterio de comparación.

$0 \leq f(x) \leq g(x)$ entonces

si $\int_0^\infty g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_0^\infty f(x)\,dx$ también.



y $0 \leq \int_0^\infty f(x)\,dx \leq \int_0^\infty g(x)\,dx$.

si $\int_0^\infty f(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow \int_0^\infty g(x)\,dx$ diverge.

Ejemplo: $\int_0^\infty \frac{2x+1}{1+x^2+x^4}\,dx$; $\int_0^\infty \frac{2}{x^3}\,dx$

$f(x) = \frac{2x+1}{1+x^2+x^4}$. $\quad \frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \neq 0$ cuando $x \to \infty$.

$g(x) = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$. $\quad 1-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < 1+\varepsilon$. si $x \geq x_0$.

$g(x)(1-\varepsilon) < f(x) < g(x)(1+\varepsilon)$.

Criterio de comparación por el cociente.

$f, g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ continuas. $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ $\forall x \in [0,+\infty)$.

si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$ y $l \neq 0$

entonces $\int_0^\infty f(x)\,dx$ converge si y solo si $\int_0^\infty g(x)\,dx$ converge.

Criterio de convergencia absoluta:

si $\int_0^\infty |f(x)|\,dx$ converge $\Rightarrow \int_0^\infty f(x)\,dx$ converge.

Ejemplo: $\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}\,dx$

$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ converge

$\int_0^\infty \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right|\,dx$ diverge.

$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}$

$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ converge $\Rightarrow \int_{-\infty}^\infty \left|\frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\right|\,dx$ converge.

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx$ converge.

NOTA

$\Gamma(x) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$ Converge $\forall \alpha \geq 0$

Función Gamma

$$\underbrace{\int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx}_{\int_0^1 x^{\alpha-1} dx} + \int_1^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$

$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\, \Gamma(\alpha)$

$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^\alpha\, dx = \int_0^\infty (-e^{-x})'\, x^\alpha\, dx$

$= \lim_{M \to +\infty} \int_0^M (e^{-x})'\, x^\alpha\, dx$

$= \lim_{M \to +\infty} \left(e^{-x} x^\alpha \Big|_0^M - \int_0^M (-e^{-x})\, (x^\alpha)'\, dx \right)$

$= \lim_{M \to \infty} \left(e^{-M} M^\alpha - e^0 \cdot 0^\alpha + \alpha \int_0^M e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, dx \right) = \alpha \int_0^\infty e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, dx$

$= \alpha\, \Gamma(\alpha)$

$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$

$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2$

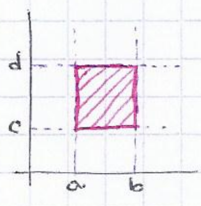
$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$

$\Gamma(5) = 4\, \Gamma(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$

$\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}$ si $n \in \mathbb{N}$

INTEGRALES DOBLES

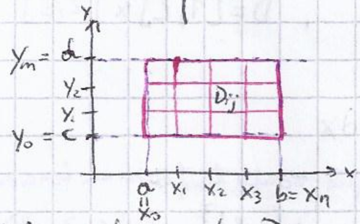
Def: $f: D \to \mathbb{R}$, $D = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\} \subseteq \mathbb{R}^2$



$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ → Integral doble en un rectángulo.

= Volumen sobre la región D abajo del gráfico de f.

= volumen de $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq z \leq f(x,y)\}$



- Una partición π del rectángulo D queda determinada por dos particiones:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ Partición de $[a,b]$

$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d$ Partición de $[c,d]$

$D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $D = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} D_{ij}$ "Unión casi disjunta"

$D_{ij} \cap D_{kl}$ tiene área 0 si $(i,j) \neq (k,l)$

- Supongamos que $f: D \to \mathbb{R}$ es acotada:

$m_{ij} = \inf f(x,y),\ (x,y) \in D_{ij}$; $M_{ij} = \sup f(x,y),\ (x,y) \in D_{ij}$

Definimos las sumas de Riemann para la partición π:

- $s_\pi(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij}\ \text{area}(D_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} \cdot \Delta x_i\, \Delta y_j$ (suma inferior)
- $S_\pi(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\ \text{area}(D_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\, \Delta x_i\, \Delta y_j$ (suma superior).

$\text{area}(D_{ij}) = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$; $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$

- $I = \underline{\iint} f(x,y)\,dx\,dy = \sup\{s_\pi(f) / \pi \text{ partición de } D\}$ (integral inferior de f en D)
- $S = \overline{\iint} f(x,y)\,dx\,dy = \inf\{S_\pi(f) / \pi \text{ partición de } D\}$ (integral superior de f en D)

Def: f es integrable en el sentido de Riemann en D si $I = S$.

En ese caso, su valor común se anota por: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

TEOREMA: $D=[a,b]\times[c,d]$ $f: D\longrightarrow\mathbb{R}$

Si f es continua en $D \Rightarrow f$ es integrable en D.

TEOREMA DE FUBINI: $D=[a,b]\times[c,d]$, $f: D\longrightarrow\mathbb{R}$ continua.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$$

$$= \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy$$

Ejemplo: $I=\iint_D x^3y^2\,dx\,dy$, $D=[1,2]\times[2,3]$

$$I=\int_1^2\left[\int_2^3 x^3y^2\,dy\right]dx$$

Porque como la f está en función de y, x es cte.

$$\int_2^3 x^3y^2\,dy = x^3\int_2^3 y^2\,dy = x^3\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{x^3}{3}(3^3-2^3) = \frac{19}{3}x^3$$

$$\int_1^2\frac{19}{3}x^3\,dx = \frac{19}{3}\int_1^2 x^3\,dx = \frac{19}{3}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{19}{12}(2^4-1^4) = \frac{19\cdot 15}{12}.$$

obs: $D=[a,b]\times[c,d]$

$$\iint_D f(x)\cdot g(y)\,dx\,dy = \int_a^b\left[\int_c^d f(x)\cdot g(y)\cdot dy\right]dx$$

Caso especial de una función de variables separadas.

$$=\int_a^b f(x)\left[\int_c^d g(y)\,dy\right]dx$$

$$=\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)$$

INTEGRALES TRIPLES

Def. $D=[a,b]\times[c,d]\times[e,f]=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d,\ e\leq z\leq f\}$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \Rightarrow \text{Integral triple.}$$

TEOREMA DE FUBINI: $D=[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$

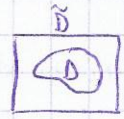
$$\iiint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b\left[\int_c^d\left[\int_e^f F(x,y,z)\,dz\right]dy\right]dx$$

$$=\int_e^f\left[\int_c^d\left[\int_a^b F(x,y,z)\,dx\right]dy\right]dz$$

... y así, puedo hacer $n!$ combinaciones si tengo n variables diferentes

NOTA

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ una región compacta (cerrada y acotada)

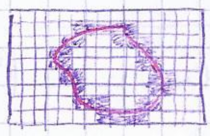


(necesito ∂D tenga área 0)

Sea $\tilde{D}$ un rectángulo de lados paralelos a los ejes / $D \subseteq \tilde{D}$

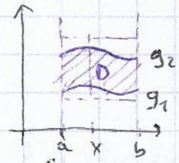
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy \qquad \tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin \tilde{D} \end{cases}$$

Def: Si $\tilde{D}$ es un rectángulo y $C \subseteq \tilde{D}$ es un conjunto, C tiene área 0 si para cada $\varepsilon > 0$ puedo conseguir una partición de $\tilde{D}$ tal que la suma de las áreas de los rectángulos en $\tilde{D}$ que cortan a C es menor que ε.



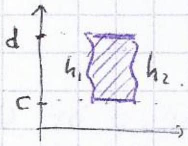
TEOREMA: El gráfico de una función continua tiene área 0.

Def: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ región de tipo I



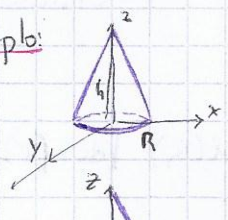
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx.$$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d;\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ región de tipo II



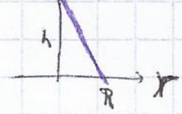
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right] dy.$$

Ejemplo:



$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq R^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -R \leq x \leq R,\ -\sqrt{R^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2-x^2}\}$

$$f(x,y) = h\left(1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right)$$



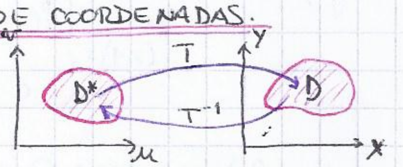
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \mathrm{vol}(\triangle) \quad ; \quad z = h\left(1-\frac{r}{R}\right) \ ; \ r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\mathrm{vol}(\triangle) = \int_{-R}^{R} \left[\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} h\cdot\left(1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right) dy\right] dx.$$

Def: $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / a\le x\le b,\ g_1(x)\le y\le g_2(x),\ h_1(x,y)\le z\le h_2(x,y)\}$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_a^b\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\left[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dy\right]dx$$

CAMBIO DE COORDENADAS.

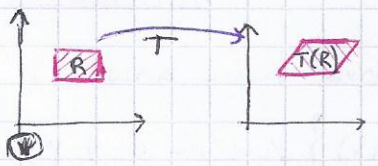


$T: D^*\to D$, biyectiva C^1 con inversa C^1

$D, D^*\subseteq\mathbb{R}^2$; $(x,y)=T(u,v)$

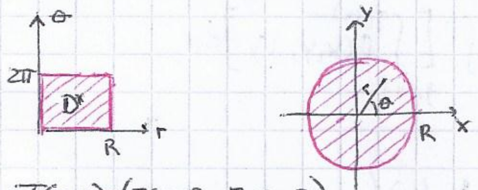
$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D^*} f(T(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv}$$

$J(u,v)=\det[DT(u,v)] \longrightarrow$ Jacobiano de T.



$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ lineal

$\text{area}(T(R))=\text{area}(R)\cdot|\det(T)|$



$x=r\cos\theta$
$y=r\,\text{sen}\,\theta$

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0<x^2+y^2\le R\}$
$D^*=\{(r,\theta)/0<r\le R,\ 0\le\theta<2\pi\}$

$T(r,\theta)=(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$
$J(r,\theta)=r$

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\,r\cdot dr\,d\theta}$$ CAMBIO DE COORDENADAS POLARES.

$D=T(R)$ $f(x,y)=1$, $D^*=R$.

$$\text{vol}(D)=\iint_D 1\,dx\,dy=\iint_{D^*}1\,|\det(T)|\,du\,dv=\text{vol}(R)\cdot|\det(T)|$$

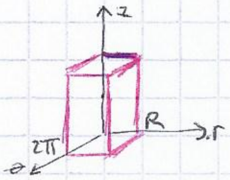
$$\text{vol}(\triangle)=\int_0^R\left[\int_0^{2\pi}h\left(1-\frac{r}{R}\right)r\,d\theta\right]dr$$

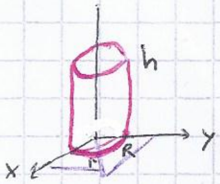
$$=2\pi h\int_0^R\left(1-\frac{r}{R}\right)r\,dr$$

$$=2\pi h\left[\int_0^R r\,dr-\int_0^R\frac{r^2}{R}dr\right]$$

$$=2\pi h\left(\frac{R^2}{2}-\frac{1}{R}\cdot\frac{R^3}{3}\right)=2\pi hR^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi hR^2}{3}.$$

NOTA





$r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad x = r\cos\theta$

$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

$z = \tilde{z}$

$D = \{(x,y,z) / x^2+y^2 \leq R^2,\ 0 \leq z \leq h\}$

$D^* = \{(r,\theta,z) / 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \tilde{z} \leq h\}$

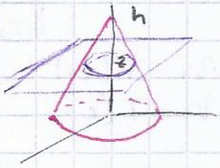
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \tilde{z}} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{z}} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \tilde{z}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

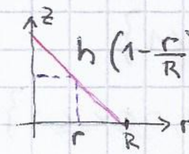
$$\boxed{\iiint_{D=\text{cilindro}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*=\text{caja}} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz}$$

CAMBIO DE COORDENADAS CILÍNDRICAS

$$\mathrm{vol}(\triangle) = \iiint_{D=\triangle} 1\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} 1\ r\,dr = (*)$$

$D^* = \{(r,\theta,z) / 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq g(r)\}$.





$h\left(1-\frac{r}{R}\right) = g(r)$

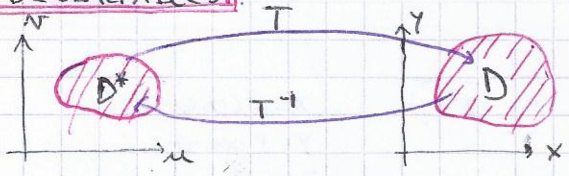
$$(*) = \int_0^R \left[\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{g(r)} r\,dz\right] d\theta\right] dr$$

$$= \int_0^R \left[\int_0^{2\pi} r\,g(r)\,d\theta\right] dr$$

$$= 2\pi \int_0^R r\cdot g(r)\,dr = 2\pi \int_0^R r\left(1-\frac{r}{R}\right) dr.$$

CAMBIO DE VARIABLES

$D \subseteq \mathbb{R}^2$



$(x,y) = T(u,v)$

TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLES

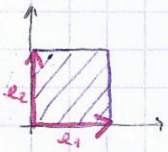
T biyectiva entre D y D^*, T y T^{-1} de clase C^1 (salvo quizás sacándole un conjunto de "área" 0 a D y D^*)

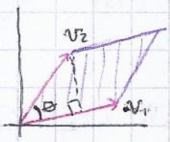
$J(u,v) = \det[DT(u,v)]$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(T(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv.$$

- Si $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal:

área $(T(\square)) =$ área $(\square) \cdot \det(T)$





área $(\square) =$ base × altura $= \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \operatorname{sen}\theta$

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\text{altura}}{\|v_2\|}$

$v_1 = T(e_1)$
$v_2 = T(e_2)$

$\square = \{x \in \mathbb{R}^2 / (x_1, x_2) / 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1\}$
$= \{x \in \mathbb{R}^2 / x = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2, 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1\}$

$x = x_1 e_1 + x_2 e_2$

$T(x) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) = x_1 v_1 + x_2 \cdot v_2$

$T(\square) = \{x \in \mathbb{R}^2 / x = x_1 v_1 + x_2 v_2 / 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1\}$

$\langle v_1, v_2 \rangle = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \cos\theta$

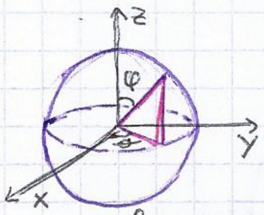
$\langle v_1, v_2 \rangle^2 = \|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 \cdot \cos^2\theta$

área $(\square)^2 = \|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 (1 - \cos^2\theta)$
$= \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \left(1 - \dfrac{\langle v_1, v_2 \rangle^2}{\|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2}\right)$

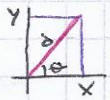
área $(\square)^2 = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2$

$v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}$; $[T] = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$

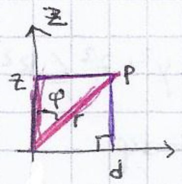
área $(\square)^2 = (v_{11}^2 + v_{21}^2) \cdot (v_{12}^2 + v_{22}^2) - (v_{11} v_{12} + v_{21} v_{22})^2$
$= v_{11}^2 v_{12}^2 + v_{11}^2 v_{22}^2 + v_{21}^2 v_{12}^2 + v_{21}^2 v_{22}^2 - [v_{11}^2 v_{12}^2 + 2 v_{11} v_{12} v_{21} v_{22} + v_{21}^2 v_{22}^2]$
$= v_{11}^2 v_{22}^2 + v_{21}^2 v_{12}^2 - 2 v_{11} v_{12} v_{21} v_{22} = (v_{11} v_{22} - v_{21} v_{12})^2 = (\det[T])^2 \Rightarrow \boxed{\text{área}(\square) = |\det[T]|}$



$P=(x,y,z)$, $\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\|(x,y,z)\|$



$d=\sqrt{x^2+y^2}$, $\quad \begin{array}{l} x=d\cos\theta \\ y=d\,\text{sen}\,\theta \end{array}$



θ = longitud

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ - latitud

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq \varphi \leq \pi$

$$\begin{cases} \text{sen}\,\varphi = \frac{d}{r} \\ \cos\varphi = \frac{z}{r} \end{cases} \qquad \begin{cases} z = r\cos\varphi \\ d = r\,\text{sen}\,\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\,\text{sen}\,\varphi\cdot\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\varphi\cdot\text{sen}\,\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \text{sen}\,\varphi\cos\theta & r\,\text{sen}\,\varphi(-\text{sen}\,\theta) & r\cos\varphi\cdot\cos\theta \\ \text{sen}\,\varphi\cdot\text{sen}\,\theta & r\cdot\text{sen}\,\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\,\text{sen}\,\theta \\ \cos\varphi & 0 & r(-\text{sen}\,\varphi) \end{vmatrix}$$

$$J = r^2\,\text{sen}\,\varphi \cdot \begin{vmatrix} \text{sen}\,\varphi\cdot\cos\theta & -\text{sen}\,\theta & \cos\varphi\cdot\cos\theta \\ \text{sen}\,\varphi\cdot\text{sen}\,\theta & \cos\theta & \cos\varphi\cdot\text{sen}\,\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\text{sen}\,\varphi \end{vmatrix}$$

$$J = r^2\,\text{sen}\,\varphi\cdot\left[(-1)^{1+3}\cos\varphi\cdot\begin{vmatrix} -\text{sen}\,\theta & \cos\varphi\cdot\cos\theta \\ \cos\theta & \cos\varphi\,\text{sen}\,\theta \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\cdot(-\text{sen}\,\varphi)\cdot\begin{vmatrix} \text{sen}\,\varphi\cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{vmatrix}\right]$$

$$J = r^2\,\text{sen}\,\varphi\cdot\left[\cos^2\varphi\underbrace{\begin{vmatrix} -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta \end{vmatrix}}_{=(-1)} + (-\text{sen}^2\varphi)\underbrace{\begin{vmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{vmatrix}}_{=1}\right]$$

$$= -r^2\,\text{sen}\,\varphi\cdot(\cos^2\varphi + \text{sen}^2\varphi)$$

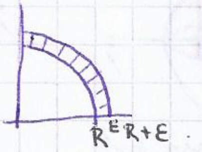
$$= -r^2\,\text{sen}\,\varphi$$

NOTA

$T(r,\theta,\varphi)=(r\cdot \text{sen}\varphi\cdot\cos\theta, r\,\text{sen}\varphi\cdot\text{sen}\theta, r\cdot\cos\varphi)$

$D^* = \{(r,\theta,\varphi) / 0\leq r\leq R,\ 0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq\varphi\leq\pi\}$

$\text{vol}(\ominus) = \iiint_D 1\, dx\,dy\,dz.$



$\ominus = D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2\leq R^2\}$

$\text{vol}(\ominus) = \iiint_{D^*} r^2\,\text{sen}\varphi\, dr\,d\theta\,d\varphi$

$V(R) = \lim_{\varepsilon\to 0} \dfrac{V(R+\varepsilon)-V(R)}{\varepsilon}$

$\Rightarrow$ Area de la esfera de radio R

$\text{vol}(\ominus) = \int_0^R\left[\int_0^{2\pi}\left[\int_0^\pi r^2\,\text{sen}\varphi\,d\varphi\right]d\theta\right]dr$

$= 2\pi\left(\int_0^R r^2\,dr\right)\cdot\left(\int_0^\pi \text{sen}\varphi\,d\varphi\right)$

$= 2\pi\cdot\dfrac{R^3}{3}\cdot 2 = \boxed{\dfrac{4\pi R^3}{3}}$

$\int_0^\pi \text{sen}\varphi\,d\varphi = -\cos\varphi\Big|_0^\pi$

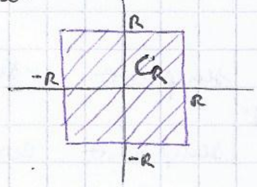
$= -\cos\pi + \cos 0$

$= 1+1 = 2.$

$\boxed{\text{Area de la esfera de radio } R = 4\pi R^2}$

$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = 1$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$, $\iint e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy$?

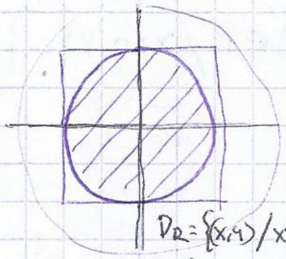


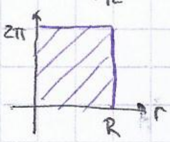
$= \lim_{R\to+\infty}\iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx\right)^2$

$C_R = \{(x,y)/ |x|\leq R, |y|\leq R\}$

$\iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy = \iint_{C_R} e^{-x^2/2}e^{-y^2/2}\,dx\,dy =$

$= \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2/2}\,dx\right)\cdot\left(\int_{-R}^{R} e^{-y^2/2}\,dy\right) = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2/2}\,dx\right)^2$





$$I_2 = \lim_{R\to\infty} \iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)/2} \, dx\,dy$$

$(= \operatorname{Sup}_{R>0})$

$$= \lim_{R\to\infty} \iint_{D_R^*} e^{-r^2/2} \, r\,dr\,d\theta$$

$$= \lim_{R\to\infty} 2\pi \int_0^R e^{-r^2/2} \, r\,dr.$$

$u = \frac{r^2}{2}$, $\frac{du}{dr} = 2r$.

$$= \lim_{R\to+\infty} 2\pi \int_0^{R^2/2} e^{-u} \, du$$

$$= 2\pi \int_0^\infty e^{-u} \, du = 2\pi.$$

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} \, dx \qquad (p>0)$$

$\Gamma(p) = (p-1)!$ si $p \in \mathbb{N}$.

$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$.

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x} \, dx = \int_0^\infty \sqrt{2}\, e^{-u^2/2} \, du = \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-u^2/2} \, du = \sqrt{2} \, \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$$

$x = \frac{u^2}{2}$ $\quad \frac{dx}{du} = u$

$\sqrt{2x} = u$ $\quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} x^{1/2}$.

$$\boxed{\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}}$$

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} \, dx \quad \Rightarrow \text{Integral beta de Euler.}$$

$$\underbrace{\int_0^{1/2} x^{p-1}\underline{(1-x)^{q-1}} \, dx}_{1/2 \leq 1-x \leq 1} + \underbrace{\int_{1/2}^1 \underline{x^{p-1}} (1-x)^{q-1} \, dx}$$

comparo con $\int_0^{1/2} x^{p-1} dx$
$(1-x)^{q-1}$ es acotada
converge $\Leftrightarrow p>0$.

Comparo con $\int_{1/2}^1 (1-x)^{q-1} \, dx$

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)=\left(\int_0^{\infty}x^{p-1}\cdot e^{-x}dx\right)\cdot\left(\int_0^{\infty}y^{q-1}\,e^{-y}dy\right)$$

$$=\iint_D x^{p-1}\cdot y^{q-1}\,e^{-(x+y)}\,dx\,dy\,,\qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x>0,y>0\}$$

$$=\iint_{D^*}(uv)^{p-1}\left[u(1-v)\right]^{q-1}\cdot e^{-u}\,u\,du\,dv.$$

$\begin{cases}u=x+y\\ v=\frac{x}{x+y}\end{cases}$

$v(x+y)=x$

$\begin{cases}x=u\cdot v\\ y=u(1-v)\end{cases}$

$y=u-x$

$y=u-uv$

$D^*=\{(u,v)/u>0,\ 0<v<1\}$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv}\\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}v & u\\ 1-v & -u\end{vmatrix}$$

$$=v(-u)-u(1-v)$$

$$=-v\cdot u-u+u\cdot v=-u.$$

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)=\int_0^{\infty}\left[\int_0^1 u^{p+q-1}\,v^{p-1}(1-v)^{q-1}e^{-u}dv\right]du$$

$$=\left(\int_0^{\infty}u^{p+q-1}e^{-u}du\right)\cdot\left(\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv\right)$$

$$=\Gamma(p+q)\cdot B(p,q)$$

$$\boxed{B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}}$$

ejemplo: $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\underbrace{\Gamma(1)}_{=1}}=\Gamma(\frac{1}{2})^2$ (*)

$$B(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})=\int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}dx=\int_0^1\frac{1}{u}(1-u^2)^{-1/2}\,2u\,du=2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du.$$

$x=u^2$

$\frac{dx}{du}=2u$

$u=x^{1/2}$

$$=2(\text{arcsen }1-\text{arcsen }0).=\pi$$

(*) entonces $\Gamma(\frac{1}{2})^2=\pi$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}.$$

$f(x)=cte\cdot x^{p-1}e^{-\alpha x}.$

NOTA

- puto el que lee -