1) a) Sea A = 1,2,…,10. Determinar cuántas relaciones de equivalencia se pueden definir tales que haya exactamente dos clases de equivalencia.

Una vez que están definidas las clases de equivalencia, está definida la relación.

$2^9 - 1$

b) Determinar también cuántas se pueden definir para que haya 3 clases de equivalencia.

Supongamos que tengo las clases de equivalencia *a*, *b* y *c*. Para asignarle a cada número una clase, hay 3^{10} combinaciones posibles. A eso le tengo que restar las combinaciones que solo incluyen dos de las letras.

Incluyen solo *a* y *b*: 2^{10}

Incluyen solo *b* y *c*: 2^{10}

Incluyen solo *c* y *a*: 2^{10}

Y resté dos veces los casos en los que todos los números están en la misma clase, así que hay que sumar 3. Por último, como es lo mismo intercambiando *a* con *b*, *a* con *c*, *c* con *b*, *a* con *b* y *b* con *c* o *a* con *c* y *b* con *c*, divido por 6.

Total: $\dfrac{3^{10} - 2^{10} + 3}{6} = \dfrac{3^9 + 1}{2} - \dfrac{2^9}{3}$

2) Hallar para todo $n \in N$ el resto de dividir 2^{2^n} por 13.

$$2^{2^n} 2^{12k} 2^{r_{12}(2^n)} \equiv 1^k \cdot 2^{r_{12}(2^n)} \equiv 2^{r_{12}(2^n)} (13)$$

Afirmo que para *n*>1, $\begin{array}{l} r_{12}(2^n) = 4 \leftarrow 2 \mid n \\ r_{12}(2^n) = 8 \leftarrow 2 \nmid n \end{array}$

$$r_{12}(2^{2k}) = r_{12}\left((2^2)^k\right) = r_{12}(4^k)$$

$$r_{12}(4^1) = 4$$

$$r_{12}(4^k) = 4 \Rightarrow r_{12}(4^{k+1}) = r_{12}(4^k 4) = r_{12}\left(r_{12}(4) r_{12}(4^k)\right) = r_{12}(16) = 4$$

$$r_{12}(2^{2k+1}) = r_{12}(2 \cdot 4^k) = 2 r_{12}(4^k) = 8$$

$$2 \mid n \rightarrow 2^{r_{12}(2^n)} = 2^4 \equiv 3(13)$$

$$2 \nmid n \rightarrow 2^{r_{12}(2^n)} = 2^8 \equiv 2^4 2^4 \equiv 9(13)$$

$$n = 1 \rightarrow 2^{2^1} \equiv 4(13)$$

3) Sea $p(x)$ un polinomio en $Q[x]$ irreducible, tal que $\alpha \in C$ es una raíz de $p(x)$. Probar que si $q(x) \in Q[x]$ es un polinomio tal que $q(\alpha) = 0$, entonces $p \mid q$. Sugerencia: Considerar $(p : q)$

$(p : q) = d$

$d \mid p$

p irreducible $d = k \vee d = p$
Si $d = p$ como $d \mid q$, $p \mid q$
Si $d = k$
$k = s(x)p(x) + t(x)q(x)$
$k = s(\alpha)p(\alpha) + t(\alpha)q(\alpha) = 0$ abs
Luego $d = p$ y $p \mid q$

4) Encontrar un polinomio de grado 2 en $Z[x]$ tal que:
$f(0) \equiv f(1) \equiv 0(3)$
$f(2) \equiv f(0) \equiv 0(5)$
$f(2) \equiv f(4) \equiv 0(7)$

$f(x) = 105x^2$??

Y si te piden mónico?
$c \equiv 1 + b + c \equiv 0(3)$
$4 + 2b + c \equiv c \equiv 0(5)$
$4 + 2b + c \equiv 16 + 4b + c \equiv 0(7)$

$c \equiv 0(3)$
$b \equiv 2(3)$
$c \equiv 0(5) \Rightarrow c \equiv 0(15)$
$b \equiv 3(5) \Rightarrow b \equiv 8(15)$
$2b + c \equiv 3(7)$
$4b + c \equiv 5(7)$
$2b \equiv 2(7)$
$b \equiv 1(7) \Rightarrow b \equiv 8(105)$
$c \equiv 1(7) \Rightarrow c \equiv 15(105)$
$x^2 + 8x + 15$

5) Sea $w \in G_n$. Se define el orden de *w* como $ord(w) = \min m \in N / w^m = 1$

a) Probar que $ord(w) \mid n$
   Si no fuera así
   $n = k \cdot ord(w) + r$
   $0 \leq r < ord(w)$
   $w^n = \left(w^{ord(w)}\right)^k w^r = 1$
   $w^r = 1$
b) Probar que si *w* tiene orden *k*, entonces *w* es primitiva de orden *k*.

$ord(w)=k$ implica que $w^k=1$ y si $l<k$ $w^l\neq 1$

Para que sea primitiva de orden *k*, $w^k=1$ y si $l<k$ $w^l\neq 1$ porque w^l genera las otras raíces.