| 1 | 2 | 3 | 4 | Calificación |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 21 | 25 | 25 | 91 (A) |

# Probabilidad y Estadística (C)

**Segundo parcial - 28/11/2019**

*Complete esta hoja y entréguela con el resto del examen.* ***Realizar cada ejercicio en hoja separada****. Escribir el nombre en cada una. Al retirarse debe firmar una hoja de asistencia.*

APELLIDO Y NOMBRES: [redacted] Nº DE LIBRETA: [redacted]

mail: [redacted] FIRMA: [redacted]

Turno: Tarde: 14 a 17 hs | Noche: 19 a 22 hs — Nº de hojas entregadas: 9

*Criterio de aprobación: Para aprobar este examen es necesario sumar al menos 60 puntos.*

*Recuerde definir con palabras los eventos y/o las variables aleatorias involucradas, nombres y parámetros de las distribuciones.* ***Justifique claramente sus afirmaciones.***

1. (20 puntos) Una fábrica produce lámparas. Se observa la duración (en meses) de 35 lámparas elegidas al azar producidas por dicha fábrica, obteniéndose los siguientes valores, ordenados de menor a mayor,

   0.89 , 1.43 , 2.55 , 3.36 , 3.50 , 3.53 , 4.42 , 4.88 , 7.06 , 7.78 ,
   8.09 , 10.47 , 12.95 , 13.58 , 13.89 , 14.12 , 15.41 , 15.71 , 18.29 , 22.96
   23.92 , 24.55 , 24.85 , 25.31 , 28.16 , 29.51 , 29.70 , 31.69 , 33.38 , 34.45 ,
   45.02 , 56.75 , 69.48 , 95.01 , 106.17 ,

   cuyo promedio es 24.08057.

   (a) (4 p) Estime la probabilidad de que una lámpara producida por esta fábrica dure más de 10 meses.

   (b) (4 p) Estime la mediana de la distribución de la duración de una lámpara.

   (c) (4 p) Dibuje un histograma de 6 barras.

   (d) (4 p) Asuma ahora que la duración de una lámpara tiene una distribución exponencial. Estime en este nuevo escenario la probabilidad de que una lámpara producida por esta fábrica dure más de 10 meses.

   (e) (4 p) Asumiendo que la duración de una lámpara tiene una distribución exponencial, obtenga en este nuevo escenario una estimación de la mediana de la distribución de la duración de una lámpara.

2. (25 puntos) Se sabe que la longitud de los ejes que fabrica un establecimiento siderúrgico tiene densidad

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} x^{\left(\frac{1}{\theta}-1\right)} I_{(0,1)}(x), \quad \theta \in \Theta = \mathbb{R}_{>0}.$$

   (a) (9 p) Hallar el estimador de MV, $\widehat{\theta}_{MV}$, y el estimador de momentos, $\widehat{\theta}_M$, de $\theta$.

   (b) (8 p) Decidir si $\widehat{\theta}_{MV}$ es insesgado o asintóticamente insesgado.

   (c) (8 p) Estudiar la consistencia de ambos estimadores.

3. (25 puntos) Sean $X_1, \ldots, X_{n_1}$ v.a.i.i.d. con distribución normal $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_1, 9)$, y sean $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ v.a.i.i.d. independientes de las anteriores con distribución normal $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_2, 9)$. Considere los promedios

$$\overline{X}_{n_1} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i \,, \quad \overline{Y}_{n_2} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i \,.$$

(a) (6 p) Indique cuál es la distribución de cada una de las siguientes variables aleatorias:

$$\overline{X}_{n_1}, \quad \overline{Y}_{n_2}, \quad \overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}.$$

(b) (9 p) Encuentre un intervalo de confianza de nivel exacto $1 - \alpha$ para $\theta = \mu_1 - \mu_2$, la diferencia de las medias, indicando cuál es el pivot y qué distribución tiene.

(c) (3 p) Considere las siguientes $n_1 = 7$ realizaciones para $X$:

$$8.31\,,\ 5.66\,,\ 8.64\,,\ 7.19\,,\ 4.16\,,\ 7.02\,,\ 2.61\,,$$

y $n_2 = 8$ realizaciones para $Y$:

$$13.30\,,\ 14.94\,,\ 7.90\,,\ 5.87\,,\ 10.71\,,\ 8.59\,,\ 16.20\,,\ 8.88\,.$$

Obtenga una estimación por intervalos para $\theta$ utilizando un procedimiento de nivel 0.95.

(d) (7 p) ¿Indican los datos del item anterior, a nivel 0.05, una diferencia de las medias?

4. (30 puntos) Un individuo afirma tener poderes extrasensoriales. Para demostrar su habilidad, se somete a una prueba que consiste en adivinar el palo (copa - espada - bastos - oro) de una serie de $n$ cartas elegidas al azar. Sea $p$ la probabilidad de que el individuo acierte el palo de una carta elegida al azar.

(a) (2 p) Indique cuál es el valor $p_0$ de $p$ si el individuo no posee poderes extrasensoriales y responde al azar.

En adelante, basta con que $p$ sea mayor que $p_0$ para considerar que nuestro amigo tiene poderes.

(b) (8 p) Plantee $H_0$, $H_1$ y una región de rechazo $\mathcal{R}$ de nivel asintótico 0.05 que le permita concluir que el individuo tiene poderes. Caso contrario, será declarado un chanta.

(c) (8 p) Utilizando $n = 50$, calcule la probabilidad aproximada de que el individuo sea declarado un chanta cuando la probabilidad verdadera de que acierte el palo de una carta elegida al azar es $p = 0.4$.

(d) (3 p) Si el individuo acierta el 30% de las $n = 50$ veces en las que se repite el experimento, ¿puede concluir a nivel aproximado 0.05 que tiene poderes?

(e) (4 p) Calcular de manera aproximada el p-valor correspondiente a los resultados del item anterior.

(f) (5 p) Calcular de manera aproximada el p-valor pero asumiendo ahora que el individuo acertó 90 de las 300 cartas que se le mostraron. ¿Puede concluir en este nuevo escenario, a nivel aproximado 0.05, que tiene poderes? ¿Cambia la proporción muestral de aciertos? ¿Cambian las conclusiones?

10

1) "Fábrica de lámparas"

$n = 35$ $X_i$ = vida de una lámpara

$\overline{X}_n = 24{,}08057$ (en meses)

a) Para estimar la proba de que $X > 10$ meses,

veo en las realizaciones, la proporción de lámparas que duraron más de 10 meses, (que son 24) o sea la frecuencia relativa:

$$\hat{p}_{>10} = \frac{24}{35} \approx 0{,}686$$

estimación con datos

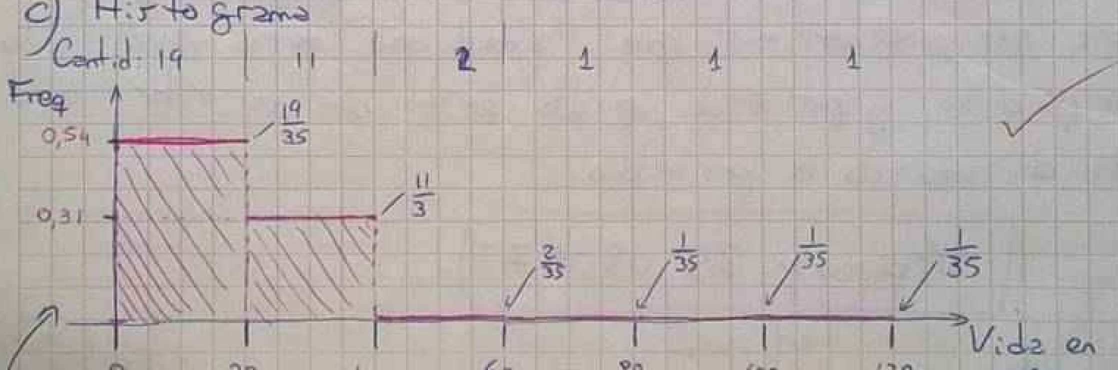
$$\boxed{P(X>10) \approx 0{,}686}$$

b) Similarmente, para estimar la mediana, uso los datos y su mediana, el valor "del medio" (en datos ordenados):

$$\boxed{\text{Mediana}(X) \approx 15{,}71}$$

estimación

c) Histograma




(Lo hice en hoja 2 de nuevo, más grande :)

d) Si $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$

Como $E[X_i] = \frac{1}{\lambda}$

y tengo el dato $\overline{X}_n = 24,08057$

Puedo estimar $\lambda$ haciendo uso de $\overline{X}_n \xrightarrow[n \to \infty]{\text{LGN} \quad \text{TCL}} E[X]$

$$\lambda = \frac{1}{E[X]}$$

¿Qué estimador usas?

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{24,08057} \approx 0,0415$$

$$P(X > 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \approx e^{-\hat{\lambda} 10}$$

$$\boxed{P(X > 10) \approx 0,66}$$

estimación aprox.

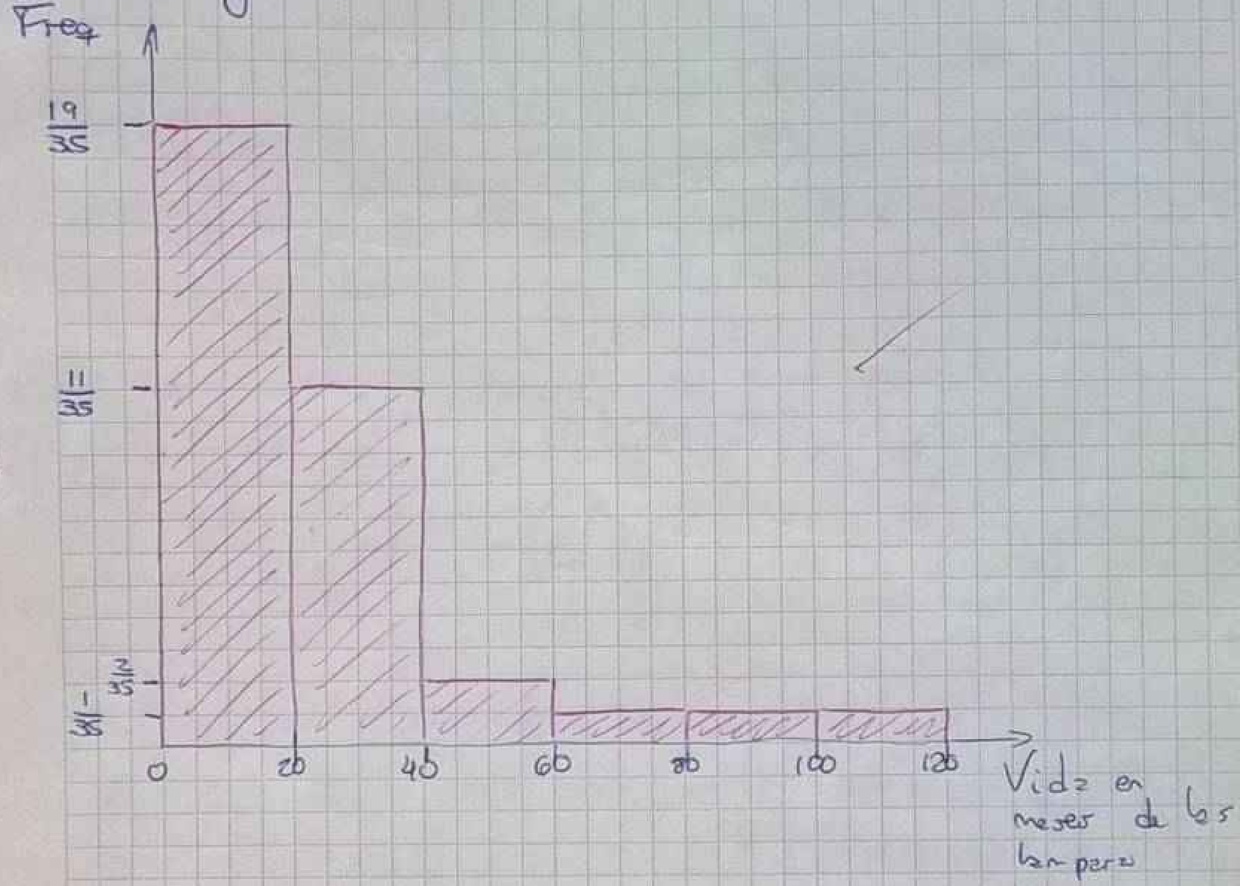
e) Asumir que la distribución es exponencial ~~del dato~~ ~~[illegible]~~

me permite asumir que la mediana será igual a la esperanza, y por ende, puedo estimar su valor como en d, usando el promedio.

$$\boxed{\text{Mediana} \approx 24,08057}$$

estimación

c) Histograma



21/25

Hoja 3/9

FECHA

2) $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} \cdot x^{\left(\frac{1}{\theta}-1\right)} \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$ , $\theta \in \Theta = \mathbb{R}_{>0}$

$X_i$ := longitud de un eje elegido al azar en el establecimiento siderúrgico"

a) Estimador de MV

Función de verosimilitud:

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n ; \theta)$$

$$\overset{X_i \text{ indep}}{=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i ; \theta)$$

$$\overset{\text{dato}}{=} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \cdot x_i^{\left(\frac{1}{\theta}-1\right)} \cdot \underline{\mathbb{1}_{(0,1)}(x_i)}$$

- Como los datos que se usan con el estimador, provienen de la densidad dada, puedo asumir que $\underline{x_i \in (0,1)}$, y por ende, puedo descartar la indicadora $\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$, pues siempre vale. ✓

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \cdot x_i^{\left(\frac{1}{\theta}-1\right)}$$

Aplico log para derivar fácilmente (pues es monótona y no modifica la "posición" del máx/mín)

$$\log(L(\cdot)) = \ell(x_1 \dots x_n ; \theta) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} x_i^{\left(\frac{1}{\theta}-1\right)}\right)$$

Likelihood

log-likelihood

$$= \sum_{i=1}^{n} -\log(\theta) + \left(\frac{1}{\theta}-1\right) \cdot \log(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -\log(\theta) + \frac{1}{\theta} \cdot \log(x_i) - \log(x_i)$$

NOTA

Derivo e igualo a cero para encontrar pto. crítico:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} l = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{\theta} - \theta^{-2} \cdot \log(x_i) + \cancel{0} = 0$$

$$\theta^2 \left( -\frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\log(x_i)}{\theta^2} \right) = 0 \cdot \theta^2$$

$$-n \cdot \theta - \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) = 0$$

$$-n\theta = \sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

$$\boxed{\hat{\theta}_{MV} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}{n}}$$

Estimador de Máx. Verosimilitud.

Verifico que es Máximo en hoja siguiente ↓

Estimador de Momentos.

Calculo 1° momento:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\theta} \cdot x^{\left(\frac{1}{\theta}-1\right)} \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(x) \cdot dx$$

$$= \int_0^1 x \cdot \frac{1}{\theta} \cdot x^{\left(\frac{1}{\theta}-1\right)}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\theta} \cdot x^{\frac{1}{\theta}}\,dx = \frac{1}{\theta} \cdot \left[ \frac{x^{\left(\frac{1}{\theta}+1\right)}}{\left(\frac{1}{\theta}+1\right)} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\theta} \cdot \left( \frac{1}{\frac{1}{\theta}+1} - 0 \right) = \frac{1}{\theta\left(\frac{1}{\theta}+1\right)} = \frac{1}{1+\theta}$$

$$E[X] = \frac{1}{1+\theta} \iff \theta = \frac{1}{E[X]} - 1$$

sigo en hoja sig ↓

Sigo del 2a) $\theta = \frac{1}{E[X]} - 1$

Como por LGN sé que $\overline{X}_n \xrightarrow{n \to \infty} E[X]$

entonces puedo usar este hecho para estimar $\theta$

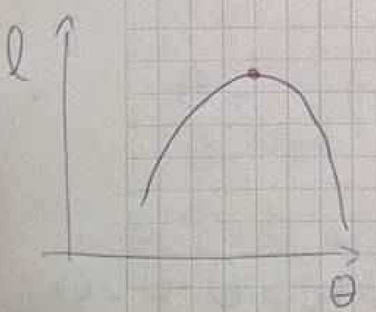
usando el promedio:

$$\boxed{\hat{\theta}_{m} = \frac{1}{\overline{X}_n} - 1} \checkmark$$

Vuelvo a $\hat{\theta}_{MV}$ para verificar que sea un máximo el pto. crítico encontrado.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} l = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{\theta} - \theta^{-2} \cdot \log(x_i)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta} l = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\underbrace{\theta^{-2}}_{\text{dato: }} + \underbrace{\theta^{-3}}_{\theta > 0}}_{>0} \cdot \underbrace{\log(x_i)}_{>0}$$



Como la segunda derivada de la función es POSITIVA, sé que será cóncava hacia abajo, y por ende, el pto. crítico encontrado es un Máx.

No, hay que evaluar en el P.C. y ver $< 0$.

b) Sesgo: $b(\hat{\theta}_{MV}) = E[\hat{\theta}_{MV}] - \theta$

linealidad de $E[\,]$ y $X_i$ iid

$$E[\hat{\theta}_{MV}] = E\left[\frac{-\sum_{i=1}^{n} \log x_i}{n}\right] = -\frac{n}{n} \cdot E[\log(x_1)]$$

$$= -E[\log(x_1)]$$

$$E[\log(x_1)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \log(x) \cdot \frac{1}{\theta} \cdot x^{\left(\frac{1}{\theta}-1\right)} \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 \log(x) \cdot \frac{1}{\theta} \cdot x^{\left(\frac{1}{\theta}-1\right)}\, dx$$

$$= \frac{1}{\theta} \cdot \int_0^1 \log(x) \cdot x^{\left(\frac{1}{\theta}-1\right)}\, dx$$

Uso partes: $\boxed{\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du}$

- $u = \log x \quad \cdot\ du = \frac{1}{x} \cdot dx$
- $v = \theta \cdot x^{\frac{1}{\theta}} \quad \cdot\ dv = x^{\left(\frac{1}{\theta}-1\right)} dx$

$$= \frac{1}{\cancel{\theta}} \cdot \log x \cdot \cancel{\theta} \cdot x^{\frac{1}{\theta}} \Big|_0^1 - \frac{1}{\cancel{\theta}} \cdot \int_0^1 \cancel{\theta} \cdot x^{\frac{1}{\theta}} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$= \left[\log x \cdot x^{\frac{1}{\theta}}\right]_0^1 - \int_0^1 x^{\frac{1}{\theta}-1} \cdot dx$$

$$= \cancel{(0-0)} - \left[\theta \cdot x^{\frac{1}{\theta}}\right]_0^1 = -(\theta \cdot 1 - 0) = -\theta$$

$$E[\log(x)] = -\theta$$

$$E[\hat{\theta}_{MV}] = -E[\log(x)] \boxed{= \theta} \;\therefore\; b(\hat{\theta}_{MV}) = \theta - \theta = 0$$

$\therefore \hat{\theta}_{MV}$ es insesgado ✓

Sigo en hoja siguiente ↓

## 2c) Consistencia

Def: un estimador es consistente si

- $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$

- $P\left( |\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon \right) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Donde $\hat{\theta}_n$ es un estimador, y $n$ es la cantidad de datos.

Para el estimador de Momentos:

- $\hat{\theta}_m = \dfrac{1}{\overline{X}_n} - 1$

De antes, sabía que

- $\theta = \dfrac{1}{E[X]} - 1$

+ Como por LGN $\overline{X}_n \xrightarrow{n\to\infty} E[X]$

  + y $X \in (0,1) \Rightarrow \overline{X}_n \in (0,1)$

  $\Rightarrow \overline{X}_n \neq 0$

+ y como $g(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ es continua para $x > 0$

$\Rightarrow$ Puedo asegurar que:

- $\dfrac{1}{\overline{X}_n} - 1 \xrightarrow{n \to \infty} \dfrac{1}{E[X]} - 1$

- $\hat{\theta}_m \xrightarrow{P} \theta$

$\therefore$ $\hat{\theta}_{momentos}$ es Consistente

NOTA

Para el estimador de MV, sabía que es insesgado.

Por propiedad:

Si el estimador es asintóticamente insesgado

y

su varianza tiende a cero cuando $n \to \infty$

$\Longrightarrow$ es consistente.

Como es insesgado, vale que es asintóticamente insesgado.

Falta verificar su varianza:

$$V[\hat{\theta}_{MV}] = V\left[-\frac{\sum_{i=1}^{n} \log X_i}{n}\right] \overset{\text{prop. de varianza}}{=} \frac{1}{n^2} \cdot V\left[\sum_{i=1}^{n} \log X_i\right]$$

$$\overset{X_i \text{ indep}}{=} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} V[\log X_i]$$

$$\overset{X_i \text{ idénticas}}{=} \frac{1}{n^2} \cdot \cancel{n} \cdot V[\log X_1]$$

$$V[\hat{\theta}_{MV}] = \frac{V[\log X_1]}{n}$$

¿Como $V[\log X_1]$ es finita? ¿Por qué?

$$\Rightarrow \frac{V[\log X_1]}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$\Rightarrow V[\hat{\theta}_{MV}] \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Como cumple la propiedad: $\begin{cases} \text{Insesgado asintóticamente} \\ \text{Varianza tiende a cero} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\hat{\theta}_{MV} \text{ es consistente}}$

3) $X_i \sim N(\mu_1, 9)$

$Y_i \sim N(\mu_2, 9)$

a) Distribución de:

$\overline{X}_{n_1} = \frac{1}{n_1} \cdot \sum_{i=1}^{n_1} X_i$

Por propiedad de va Normales, sabemos que suma de normales es Normal con sus medias y $\sigma^2$ sumadas (si son indep)

$$\overbrace{E\left[\frac{1}{n_1} \cdot \sum X_i\right]}^{\overline{X}_{n_1}} = \frac{1}{n_1} \cdot \sum_{i=1}^{n_1} E[X_i] = E[X_i] = \mu_1$$

$$V\left[\frac{1}{n_1} \cdot \sum X_i\right] \overset{\text{indep}}{=} \frac{1}{n_1^2} \cdot \sum_{i=1}^{n_1} V[X_i] \overset{\text{idénticas}}{=} \frac{1}{n_1^2} \cdot n_1 \cdot V[X_i] = \frac{9}{n_1}$$

$$\boxed{\overline{X}_{n_1} \sim N\left(\mu_1, \frac{9}{n_1}\right)}$$

Equivalentemente para $\overline{Y}_{n_2}$

$$\boxed{\overline{Y}_{n_2} \sim N\left(\mu_2, \frac{9}{n_2}\right)}$$

Como $\overline{X}_{n_1}$ y $\overline{Y}_{n_2}$ son Normales, sumarlas (o restarlas) ~~[illegible]~~ da como resultado otra variable Normal

$$\boxed{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2 \, ; \, \frac{9}{n_1} + \frac{9}{n_2}\right)}$$

las varianzas siempre se suman, sea suma o resta de vas.

b) $IC_{1-\alpha}$ para $\theta = \mu_1 - \mu_2$

Pivot

$$\frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{9}{n_1} + \frac{9}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$$\boxed{\frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2} - \theta}{\sqrt{\frac{9}{n_1} + \frac{9}{n_2}}} \sim N(0,1)}$$

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2} - \theta}{\sqrt{\frac{9}{n_1} + \frac{9}{n_2}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{9}{n_1} + \frac{9}{n_2}} - (\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}) \leq -\theta \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{9}{n_1} + \frac{9}{n_2}} - (\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2})\right) = 1-\alpha$$

$$P\left((\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{9}{n_1} + \frac{9}{n_2}} \leq \theta \leq (\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}) + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{9}{n_1} + \frac{9}{n_2}}\right) = 1-\alpha$$

Sigo en hoja sig

sigo del 3 b)

$$IC_{1-\alpha} = \left( (\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}) - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{9}{n_1} + \frac{9}{n_2}} \; ; \; (\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}) + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{9}{n_1} + \frac{9}{n_2}} \right)$$

Intervalo de confianza de nivel exacto $1-\alpha$ para $\theta = \mu_1 - \mu_2$

c) $n_1 = 7$ $\quad \overline{X}_7 = \frac{43,59}{7} \approx 6,227$

$n_2 = 8$ $\quad \overline{Y}_8 = \frac{86,39}{8} \approx 10,799$

$$z_{\frac{0,05}{2}} = z_{0,025} \overset{\text{tabla}}{=} 1,96$$

Reemplazando datos en intervalo

$$IC_{0,95} = \left( (6,227 - 10,799) - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{9}{7} + \frac{9}{8}} \; ; \; (6,227 - 10,799) + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{9}{7} + \frac{9}{8}} \right)$$

$$\boxed{IC_{0,95} = (-7,6148 \; ; \; -1,5284)}$$

NOTA

d) Que el intervalo de nivel 0,95 NO contenga el cero, indica que existe una diferencia en las medias (con bastante confianza), con evidencia a favor de que $\mu_1 < \mu_2$, pues todo el intervalo es negativo.

Siempre existe la posibilidad de haber tenido mucha mala suerte con las realizaciones, pero al haber usado un IC de nivel 0,95, podemos afirmar con mucha confianza que las medias son distintas.

25

Hoja 8/9

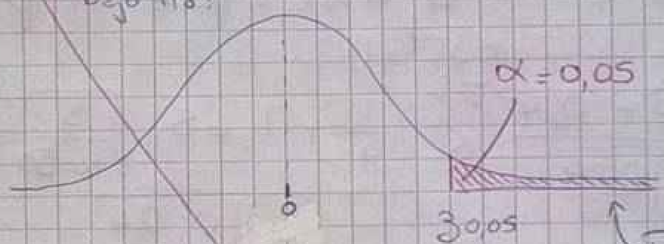
# 4) Poderes

a) Dado que hay 4 posibles pelos, la probabilidad de acertar cualquiera de ellos, al azar es de $\boxed{p_0 = \frac{1}{4}}$

b) $H_0: \boxed{p = \frac{1}{4}}$ vs $H_1: p > \frac{1}{4}$

$\alpha = 0,05$

bajo $H_0$:




Región de Rechazo de $H_0$ (tiene poderes!)

Región de Rechazo (nivel asintótico)

promedio de aciertos

$$R = \left\{ \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \geq z_{0,05} \right\} = \left\{ \hat{p} \geq p + 1,65 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right\}$$

$\overset{\sim}{\approx} N(0,1)$ TCL

donde $\boxed{p \text{ es } \frac{1}{4}}$ $p_0$!

Esto es pues modelo el problema de elegir con una distribución Bernoulli$(p)$, donde adivina con probabilidad $p$, y falla con $1-p$.

Reescribo región de rechacho con valor $p = \frac{1}{4}$

$$\left[ R = \left\{ \frac{\hat{p} - \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{3}{16 n}}} \geq 1{,}65 \right\} = \left\{ \hat{p} \geq \frac{1}{4} + 1.65 \sqrt{\frac{3}{16 . n}} \right\} \right]$$

Donde $\hat{p}$ será la proporción de aciertos sobre intentos totales.

c) $n = 50$ Pide error tipo II si $p = 0{,}4$

$$P_{p=0,4}\left( \overbrace{\frac{\hat{p} - 0{,}4}{\sqrt{\frac{0{,}24}{50}}}}^{\approx N(0,1)} \underset{\text{TCL}}{\leq} \frac{\left(\frac{1}{4} + 1{,}65 . \sqrt{\frac{3}{16 . 50}}\right) - 0{,}4}{\sqrt{\frac{0{,}24}{50}}} \right)$$

$$P_{p=0,4}\left( Z \leq -0{,}7067 \right) \overset{\text{Tabla}}{=} 1 - \phi(0{,}7067)$$

$$= 1 - 0{,}7611$$

$$= \boxed{0{,}2389}$$

Rta:
Proba aprox de que sea declarado charlatán cuando su "p verdadera" es 0,4, es de 0,2389

sigo

4d) Si $\hat{p} = 0,3$
$n = 50$

Veo si cae. en Reg. de Rechazo

$$\frac{0,3 - 0,25}{\sqrt{\frac{3}{16 \cdot 50}}} \cong 0,8165 \not> 1,65$$

Si adivina el 30% de las $n=50$ veces, NO puedo concluir ~~que~~ que tenga poderes, pues NO hay evidencia suficiente para rechazar que sea un chanta.

Rta: NO ! solo puedo concluir que es un chanta.

e) p-valor = proba. de obtener un valor igual o más extremo que 0,3 con $n=50$.

Busco en tabla $z_p = 0,81$

$\boxed{p\text{-valor} = 0,791}$ mal

f) 90 de 300

$\hat{p} = \frac{90}{300} = 0,3$

$n = 300$

Simil a d):

$\frac{0,3 - 0,25}{\sqrt{\frac{3}{16 \cdot 300}}} = \underline{2 \geq 1,65}$ ← Cae en la zona de rechazo!

• Existen evidencias suficientes para asegurar (en este caso) que tiene poderes: Rechazo!

La proporción de aciertos es la misma, pero al haber un mayor número de experimentos, la evidencia tiene mayor peso, y para este caso, el suficiente para asegurar que tiene poderes, y rechazar Ho.

NOTA