
Algebra I
Examen Final (25/2/2022)

1. Sea \mathfrak{R} la relación en G_{32} definida por

$$z \mathfrak{R} w \iff z\bar{w} \in G_{24}.$$

- (a) Probar que \mathfrak{R} es una relación de equivalencia.
(b) Determinar la cantidad de elementos $z \in G_{32}$ relacionados con i .
-

2. Sea $a \in \mathbb{N}$ dado y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de enteros definida por:

$$x_1 = 2a, x_2 = 9a^2 \quad \text{y} \quad x_{n+2} = ax_{n+1} - x_n^3, \quad \forall n \geq 1.$$

- (a) Probar que $a^n \mid x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(b) Probar que si $a \neq 1$, para ningún $n \geq 3$ vale que $a^{n+1} \mid x_n$.
-

3. Hallar el menor número natural a que satisface

$$\begin{cases} 3 \cdot 7^{15} a \equiv -15 \pmod{36}, \\ (a : 425) = 5. \end{cases}$$

4. Describir todos los pares $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ para los cuales el polinomio

$$f = X^4 + 2aX^2 + b$$

tiene raíces múltiples en \mathbb{C} , y para cada par (a, b) determinar la cantidad de raíces distintas y la multiplicidad de cada raíz. (No hace falta calcular exactamente las raíces.)

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS