3

Probabilidad y Estadística Primer Parcial - Tema 2 14 de mayo de 2009

Nombre y apellido [redacted] Número de libreta [redacted]

Turno(tachar lo que no corresponda) : ~~Tarde: Ma-Ju 14 a 17 hs.~~ | Noche: Ma-Ju 19 a 22 hs.

Por favor, al finalizar el examen señale claramente aquí qué ejercicios entrega

Entrego ejercicios 1 2 3 4 5

A

(Reservado para el corrector):

1	2	3	4	5	Nota
20	20	15	20	20	95

Por favor, resuelva cada ejercicio en hojas separadas. Numere todas las hojas y coloque en cada una su nombre y apellido. *Cada ejercicio vale 20 puntos. Para aprobar es necesario tener al menos 60 puntos. Justifique todas sus respuestas.*

1. Un comerciante recibe de su proveedor 5 latas de cierto producto al comenzar cada día. Si no vende todas debe devolver las que quedan al finalizar cada jornada. El comerciante gana \$ 10 por cada lata que vende, y pierde \$ 2 por cada lata que devuelve. La demanda diaria es una variable aleatoria con distribución de Poisson con valor esperado de 5 latas por día. Lo que ocurre cada día con las ventas de este producto es independiente de lo que ocurre cualquier otro día.

   (a) *(12 p)* Hallar la función de probabilidad puntual de la ganancia diaria.

   (b) *(8 p)* Hallar la probabilidad de que en un período de 4 días de trabajo pierda dinero en a lo sumo un día.

2. En una materia del Departamento de Computación los alumnos deben aprobar los trabajos prácticos rindiendo parciales , y luego un examen final. El 45 % de los alumnos que cursan la materia no rinden recuperatorios de los parciales. Se sabe que el 60% de los alumnos que rinden parciales recuperatorios no aprueban luego el examen final, y que el 23 % de los alumnos que no rinden parciales recuperatorios no aprueban el examen final. Se selecciona al azar un estudiante de esta materia.

   (a) *(6 p)* Calcular la probabilidad de que no rinda parciales recuperatorios y apruebe el examen final.

   (b) *(7 p)* Calcular la probabilidad de que apruebe el examen final.

   (c) *(7 p)* Sabiendo que el alumno no aprobó el final, calcular la probabilidad de que no haya rendido recuperatorios.

3. Las notas obtenidas en dos pruebas distintas A y B por los alumnos que se han presentado a una evaluación de nivel de Inglés son variables aleatorias independientes, con distribución aproximadamente normal: $X_A \sim N(54; 100)$ y $X_B \sim N(\mu; 121)$, respectivamente. Para aprobar cada una de las pruebas es necesario obtener al menos 60 puntos.

   (a) *(10 p)* Se sabe que $P(X_B < 52) = 0,1587$.Calcular la probabilidad de que un alumno apruebe ambas pruebas. B

   P (b) *(10 p)* El alumno Pérez ha obtenido una puntuación de 64 en la prueba A y de 67 en la prueba B. Calcular qué percentil representa cada una de esas notas en su respectiva distribución. En base a esta información de los percentiles definir en cuál de las dos pruebas Pérez ha obtenido mejor resultado respecto de los demás alumnos. Falta justificar.

4. Sea X una variable aleatoria uniformemente distribuída en el intervalo [0;2] ,

   (a) *(12 p)* Hallar la función de densidad de la variable $W = (2-X)^2$. B

   (b) *(8 p)* Calcular $P(W < E(W))$. B.

5. Un almacén tiene en su depósito 35 productos de cierto tipo, 15 de los cuales fueron proporcionados por el proveedor 1, 7 por el proveedor 2, y 13 por el proveedor 3. Se van a seleccionar al azar y sin reposición 2 de los productos del depósito. Sean las variables aleatorias

   X : Número de productos seleccionados que provienen del proveedor 1.

   Y : Número de productos seleccionados que provienen del proveedor 2.

   (a) *(8 p)* Hallar la función de probabilidad conjunta del vector (X, Y)

   (b) *(4 p)* Hallar las funciones de probabilidad puntual marginales: p_X y p_Y.

   (c) *(8 p)* Sea la variable aleatoria $Z = \alpha\ Y + E(X)$.Calcular todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $Var(Z) = \frac{132}{17}$.

[redacted]

HOJA Nº 1/5

FECHA 20

1. D: Demanda diaria $\sim \mathcal{P}(5)$

(a) G: Ganancia diaria en \$

$$G = 12D - 10$$

g	-10	2	14	26	38	50
$P_G(g)$	①	②	③	④	⑤	⑥

① $P(G=-10) = P(D=0) = \dfrac{5^0 e^{-5}}{0!} = e^{-5}$ ✓

② $P(G=2) = P(D=1) = \dfrac{5e^{-5}}{1!} = 5e^{-5}$ ✓

③ $P(G=14) = P(D=2) = \dfrac{25}{2}e^{-5}$ ✓

④ $P(G=26) = P(D=3) = \dfrac{125}{6}e^{-5}$ ✓

⑤ $P(G=38) = P(D=4) = \dfrac{625}{24}e^{-5}$ ✓

⑥ $P(G=50) = P(D>4) = 1 - F_D(4) = 1 - \sum_{i=0}^{4} \dfrac{5^i e^{-5}}{i!}$ ✓

$= 1 - 0.4405$

b) X: # días de un período de 4 en los que pierde dinero

$X \sim Bi(4, p)$ ✓

[redacted]

$$P = P(D=0) = e^{-5}$$

$$P(X \leq 1) = \binom{4}{0}(e^{-5})^0(1-e^{-5})^4 + \binom{4}{1}(e^{-5})^1(1-e^{-5})^3$$

$$= (1-e^{-5})^4 + 4 \cdot e^{-5} \cdot (1-e^{-5})^3 = 0.9997$$

Bien

[redacted] 20 HOJA N° 2/5

FECHA

2. R: El alumno rinde recuperatorios
F: El alumno aprueba el final

Datos:

$P(R^c) = 0.45$

$P(F^c \mid R) = 0.60$

$P(F^c \mid R^c) = 0.23$

a) $P(R^c \cap F) = P(F \mid R^c) P(R^c) = 0.77 * 0.45$
$= 0.3465$

b) $P(F) = P(F \cap R) + P(F \cap R^c)$

$P(F) = P(F \mid R) P(R) + P(F \mid R^c) P(R^c)$

$P(F) = 0.4 * 0.55 + 0.77 * 0.45$

$P(F) = 0.5665$

c) $$P(R^c \mid F^c) = \frac{P(F^c \cap R^c)}{P(F^c)} = \frac{P(F^c \mid R^c) P(R^c)}{P(F^c)}$$

$$= \frac{0.23 * 0.45}{0.4335} = 0.2388$$

NOTA

	[redacted]	HOJA Nº 3/5
		FECHA

3.

2 pruebas $<$ A, B

$X_A \sim N(54, 100) \qquad X_B \sim N(\mu, 121)$

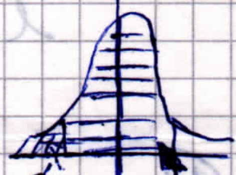
a) $P(X_B < 52) = 0.1587$

$$P\left(\frac{X_B - \mu}{11} < \frac{52-\mu}{11}\right) = 0.1587$$

$$\phi\left(\frac{52-\mu}{11}\right) = 0.1587$$

$$\phi\left(-\left(\frac{52-\mu}{11}\right)\right) = 1 - 0.1587$$

$$\phi\left(-\left(\frac{52-\mu}{11}\right)\right) = 0.8413$$



$$-\left(\frac{52-\mu}{11}\right) = 1$$

$$52 - \mu = -11$$

$$\mu = 63$$

$X_A \sim N(54, 100) \qquad X_B \sim N(63, 121)$

X_B, X_A indep

$$P(X_B \geq 60 \cap X_A \geq 60) \overset{\text{c}}{=} P(X_B \geq 60)\,P(X_A \geq 60)$$

$$= \left[1 - P\left(\frac{X_B - 63}{11} \leq \frac{-3}{11}\right)\right]\left[1 - P\left(\frac{X_A - 54}{10} \leq \frac{6}{10}\right)\right]$$

$$= \left(1 - \phi\left(-\frac{3}{11}\right)\right)\left(1 - \phi\left(\frac{6}{10}\right)\right) = \left(\cancel{1} - \cancel{1} + \phi\left(\frac{3}{11}\right)\right)\left(1 - \phi\left(\frac{6}{10}\right)\right)$$

NOTA

$= \left(\phi\left(\frac{3}{11}\right)\right)\left(1-\phi\left(\frac{6}{10}\right)\right)$

$= (0.6064)(1-0.7257)$

$= 0.1663$ ✓

b) $\phi\left(\frac{64-54}{10}\right) = \phi(1) = 0.8413$ ✓

$x_{A,0.8413} = 64$

$\phi\left(\frac{67-63}{11}\right) = \phi\left(\frac{4}{11}\right) = 0.6406$ ✓

$x_{B,0.6413} = 67$

Perez ha obtenido mejor resultado respecto de los demás alumnos en el examen A.

pero no justificas!

NOTA

4.

$$X \sim U[0,2]$$

$$W = (2-X)^2$$

$w \geq 0$

a) $$F_W(w) = P(W \leq w) = P((2-X)^2 \leq w)$$
$$= P(|2-X| \leq \sqrt{w}) = P(|X-2| \leq \sqrt{w})$$
$$= P(-\sqrt{w}+2 \leq X \leq \sqrt{w}+2)$$
$$= F_X(\sqrt{w}+2) - F_X(-\sqrt{w}+2)$$

$$(F_W(w))' = (F_X(\sqrt{w}+2) - F_X(-\sqrt{w}+2))'$$

$$f_W(w) = \frac{1}{2\sqrt{w}} f_X(\sqrt{w}+2) - \frac{1}{2\sqrt{w}} f_X(-\sqrt{w}+2)$$

$$f_X(\sqrt{w}+2) = \frac{1}{2} \iff 0 \leq \sqrt{w}+2 \leq 2$$
$$-2 \leq \sqrt{w} \leq 0$$
$$4 \leq w \leq 0 \quad \underline{\underline{\text{Abs}}}$$

$$f_X(-\sqrt{w}+2) = \frac{1}{2} \iff 0 \leq -\sqrt{w}+2 \leq 2$$
$$-2 \leq -\sqrt{w} \leq 0$$
$$0 \leq \sqrt{w} \leq 2$$
$$0 \leq w \leq 4$$

$$f_W(w) = \frac{1}{2\sqrt{w}} \frac{1}{2} I_{(0,4]}(w) = \frac{1}{4} w^{-\frac{1}{2}} I_{(0,4]}(w)$$

NOTA

b) $E(W) = \int_0^4 w\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{w}}\,dw = \frac{1}{4}\int_0^4 \sqrt{w}\,dw$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}w^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{1}{\cancel{4}_2}\frac{\cancel{2}}{3}\sqrt{4^3} = \frac{8}{6}$

$P\left(W < \frac{8}{6}\right) = \int_0^{\frac{8}{6}} \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{w}}\,dw = \frac{1}{4}\left[2w^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{8}{6}}$

$= \frac{1}{\cancel{4}_2}\cdot\cancel{2}\sqrt{\frac{8}{6}} = 0.5774$

5.

35 productos: 15 del prov 1, 7 " " 2, 13 " " 3

a) y b)

Y \ X	0	1	2	$P_Y(y)$
0	$\frac{78}{595}$	$\frac{195}{595}$	$\frac{105}{595}$	$\frac{378}{595}$
1	$\frac{91}{595}$	$\frac{105}{595}$	0	$\frac{196}{595}$
2	$\frac{21}{595}$	0	0	$\frac{21}{595}$
$P_X(x)$	$\frac{190}{595}$	$\frac{300}{595}$	$\frac{105}{595}$	1

$$P_{XY}(0,0)=\frac{\binom{13}{2}}{\binom{35}{2}} \qquad P_{XY}(0,1)=\frac{\binom{7}{1}\binom{13}{1}}{\binom{35}{2}} \qquad P_{XY}(0,2)=\frac{\binom{7}{2}}{\binom{35}{2}}$$

$$P_{XY}(1,0)=\frac{\binom{15}{1}\binom{13}{1}}{\binom{35}{2}} \qquad P_{XY}(1,1)=\frac{\binom{15}{1}\binom{7}{1}}{\binom{35}{2}}$$

$$P_{XY}(2,0)=\frac{\binom{15}{2}}{\binom{35}{2}}$$

c) $Z=\alpha Y+E(X)$

$$V(Z)=V(\alpha Y+E(X))=V(\alpha Y)=\alpha^2 V(Y)$$

$$E(Y)=1*\frac{196}{595}+2*\frac{21}{595}=\frac{2}{5}$$

$$E(Y^2)=1*\frac{196}{595}+4*\frac{21}{595}=\frac{8}{17}$$

$$V(Z)=\frac{132}{17}$$

$$\alpha^2 V(Y)=\frac{132}{17}$$

NOTA

$$\alpha^2\left(E(Y^2)-\left(E(Y)\right)^2\right)=\frac{132}{17}$$

$$\alpha^2\left(\frac{8}{17}-\frac{4}{25}\right)=\frac{132}{17}$$

$$\alpha^2\,\frac{\cancel{132}}{425}=\frac{\cancel{132}}{17}$$

$$\alpha^2=\frac{425}{17}$$

$$\alpha^2=25$$

$$\boxed{\alpha=\pm 5}$$

③ 1

14/05/09

D: Demanda diaria

$D \sim \mathcal{P}(5)$

$-2(5-D)+10D = 12D-10$

$$G(D) = \begin{cases} 12D-10 & D<5 \\ 50 & D \geq 5 \end{cases}$$

a)

g	-10	2	14	26	38	50
$P_G(g)$	$P_D(0)$	$P_D(1)$	$P_D(2)$	$P_D(3)$	$P_D(4)$	$P(D\geq 5)$
	$= 0.007$	$= 0.037$	$= 0.084$	$= 0.140$	$= 0.175$	$= 1-P(D<5)$ $= 1-0.44$ $= 0.56$

b) X: # días en los que pierde \$ de un total de 4

$X \sim Bi(4, 0.007)$

$$P(X \leq 1) = \sum_{i=0}^{1} \binom{4}{i} (0.007)^i (0.993)^{4-i} = 0.9997$$

2. F: El alumno aprueba el final

R: " " aprueba recup

$P(R^c) = 0.45$ $P(F^c|R^c) = 0.23$

$P(F^c|R) = 0.60$

a) $P(R^c \cap F) = P(F|R^c)P(R^c)$

$= (1 - P(F^c|R^c))P(R^c)$

$= 0.3465$

b) $P(F) = P(F|R)P(R) + P(F|R^c)P(R^c)$

$= (1 - P(F^c|R))\, 0.55 + (1 - P(F^c|R^c))\, 0.45$

$= 0.4 * 0.55 + 0.77 * 0.45 = 0.5665$

c) $P(R^c|F^c) = \dfrac{P(F^c|R^c)P(R^c)}{P(F^c)}$

$= \dfrac{0.23 * 0.45}{0.4335}$

NOTA

HOJA N°

FECHA

3 2

3.

$X_A \sim N(54, 100)$

$X_B \sim N(\mu, 121)$

a) $P(X_B < 52) = 0.1587$

$$P\left(\frac{X_B - \mu}{11} < \frac{52 - \mu}{11}\right) = 0.1587$$

$$\phi\left(\frac{52 - \mu}{11}\right) = 0.1587$$

$$1 - \phi\left(-\left[\frac{52 - \mu}{11}\right]\right) = 0.1587$$

$$\phi\left(-\left[\frac{52 - \mu}{11}\right]\right) = 0.8413$$

$$\frac{-52 + \mu}{11} = 1$$

$$-52 + \mu = 11$$

$$\mu = 63$$

X_B, X_A indep

$$P(X_B \geq 60 \cap X_A \geq 60) \overset{\downarrow}{=} P(X_B \geq 60) P(X_A \geq 60)$$

NOTA

$$= \left[1 - P\left(\frac{X_B - 63}{11} \leq \frac{-3}{11}\right)\right]\left[1 - P\left(\frac{X_A - 54}{10} \leq \frac{60-54}{10}\right)\right]$$

$$= \phi\left(\frac{3}{11}\right) * \left(1 - \phi(0.6)\right)$$

$$= 0.6064 * 0.2743 = 0.1663$$

b) $F_{X_A}(64) = P_{X_A}$

$$P(X_A \leq 64) = P_{X_A}$$

$$P\left(\frac{X_A - 54}{10} \leq \frac{64-54}{10}\right) = P_{X_A}$$

$$\phi(1) = P_{X_A}$$

$$0.8413 = P_{X_A}$$

$$x_{A,\,0.8413} = 64$$

$$\phi\left(\frac{67-63}{11}\right) = P_{X_B}$$

$$0.6404 = P_{X_B}$$

$$x_{B,\,0.6404} = 67$$

c) A ya que la prob de que haya mejores notas es 0.1587 y la prob de que haya mejores notas ~~en~~ en B es 0.3596

3 3

4. $X \sim U[0,2]$, $W = (2-X)^2$

a) $F_W(w) = P(W \leq w) \underset{\substack{\uparrow \\ w \geq 0}}{=} P((2-X)^2 \leq w)$

$= P(|2-X| = |X-2| \leq \sqrt{w}) = F_X(\sqrt{w}+2)$
$- F_X(-\sqrt{w}+2)$

$f_W(w) = \frac{1}{2\sqrt{w}} f_X(\sqrt{w}+2) + \frac{1}{2\sqrt{w}} f_X(-\sqrt{w}+2)$

$f_X(\sqrt{w}+2) = \frac{1}{2} \iff 0 \leq \sqrt{w}+2 \leq 2$

$-2 \leq \sqrt{w} \leq 0$

$4 \leq w \leq 0$

Abs

$f_X(-\sqrt{w}+2) = \frac{1}{2} \iff 0 \leq -\sqrt{w}+2 \leq 2$

$-2 \leq -\sqrt{w} \leq 0$

$0 \leq \sqrt{w} \leq 2$

$0 \leq w \leq 4$

$f_W(w) = \frac{1}{4\sqrt{w}} \mathbb{I}_{(0,4]}(w)$

5) $P(W < E(W))$

$$= \int_0^{E(W)} \frac{1}{4\sqrt{w}} \, dw$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sqrt{w} \right]_0^{E(W)} \quad \ast$$

$$E(W) = \int_0^4 w \frac{1}{4\sqrt{w}} \, dw = \frac{1}{6} \left[w^{\frac{3}{2}} \right]_0^4$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$\ast = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

③ 4

5.

35 productos: 15 prov. 1; 7 " 2; 13 " 3

$Y \backslash X$	0	1	2	$P_y(y)$
0	$\frac{78}{595}$	$\frac{195}{595}$	$\frac{105}{595}$	$\frac{378}{595}$
1	$\frac{91}{595}$	$\frac{105}{595}$	0	$\frac{196}{595}$
2	$\frac{21}{595}$	0	0	$\frac{21}{595}$
$P_x(x)$	$\frac{190}{595}$	$\frac{300}{595}$	$\frac{105}{595}$	1

$$P_{XY}(0,0) = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{35}{2}} = \frac{78}{595} \checkmark$$

$$P_{XY}(0,1) = \frac{\binom{13}{1}\binom{7}{1}}{\binom{35}{2}} =$$

$$P_{XY}(0,2) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{35}{2}} =$$

$$P_{XY}(1,0) = \frac{\binom{15}{1}\binom{13}{1}}{\binom{35}{2}} =$$

$$P_{XY}(1,1) = \frac{\binom{15}{1}\binom{7}{1}}{\binom{35}{2}} =$$

$$P_{XY}(2,0) = \frac{\binom{15}{2}}{\binom{35}{2}} =$$

c) $Var(Z) = \frac{132}{17}$

$Var(\alpha Y + E(X)) = \frac{132}{17}$

$\alpha^2 Var(Y) = \frac{132}{17}$

$\alpha^2 \left(E(Y^2) - E(Y)^2 \right) = \frac{132}{17}$

$\alpha^2 \left(\frac{8}{17} - \frac{4}{25} \right) = \frac{132}{17}$

$\alpha^2 \cancel{\frac{132}{425}} = \cancel{\frac{132}{17}}$

$\alpha^2 = 25$

$|\alpha| = 5$

$\alpha = \pm 5$