1) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \to \{a,b,c,d,e,f,g\} : f(i)\in\{a,b\}\ \ 1\le i\le 5.$

primero vemos $f(i)\in\{a,b\}$

hay 2 posibilidades de llegada desde 5 elem

$$2^5$$

pero para que sea sobreyectiva no puede pasar que todos vayan a $\boxed{a}$ o todos vayan a $\boxed{b}$.

Entonces (2^5-2).

Por último queda asignar $\{6,7,8,9,10\} \to \{c,d,e,f,g\}$

para cumplir sobreyectividad a todo elemento del codominio le debe llegar al menos 1 elemento del dominio.

En este caso vemos que hay que asignar funciones biyectivas

por lo tanto: $5!$

RTA $= (2^5-2).5!$

3) $w\neq 1$ y $\in \mathbb{C}$ $\quad w^7=1 \to \boxed{w\in G_7} \Rightarrow w+\bar{w}$ es raíz del polinomio.

$$P(w+\bar w)=(w+\bar w)^3+(w+\bar w)^2-2(w+\bar w)-1$$

$$= w^3+3w\bar w^2+3w^2\bar w+\bar w^3+w^2+2w\bar w+\bar w^2-2w-2\bar w-1$$

Uso $w\in G_7$

$w^n=w^{r_7(n)}$

$\bar w = w^{-1}$

$$= w^3+3\overbrace{\bar w w^5}^{w^6}+3\overbrace{\bar w^2 w^6}^{w}+w^4+w^2+2\overbrace{\bar w w^6}^{1}+w^5-2w-2w^6-1$$

$$= w^5+w^4+w^3+w^2+3w^6+3w+2-2w-2w^6-1$$

$$= w^6+w^5+w^4+w^3+w^2+w+1 = \sum_{i=0}^{6} w^i = 0 \quad \text{pq } w\neq 1$$

$$\frac{w^7-1}{w-1} = \frac{1-1}{w-1} = 0$$

$\square$

NOTA

2) $215 = 5.43$

$$\frac{43.3a^{18} - 25a^{86} + 12a}{215}$$

$215 \mid (129a^{17} - 25a^{85} + 12)$

Veo congruencia mod 5

- si $5 \mid a$ $\quad 129a^{18} - 25a^{86} + 12a \equiv 0 \ (5)$.
- si $5 \nmid a$ $\quad 129a^{18} - 25a^{86} + 12a \equiv 4a^2 + 2a \ (5)$

PTF $\boxed{a \equiv 2 \ (5)}$

tabla de restos

a	0	1	2	3	4
$4a^2+2a$	0	1	0	2	2

Veo congruencia mod 43

- si $43 \mid a$ $\quad 129a^{18} - 25a^{86} + 12a \equiv 0 \ (43)$
- si $43 \nmid a$ $\quad \underset{0}{129a^{18}} - 25a^{86} + 12a \equiv -25a^2 + 12a \ (43)$

PTF $\quad \equiv a(-25a + 12) \ (43)$

como $43 \nmid a$ $\quad -25a + 12 \equiv 0 \ (43)$
$\quad 25a \equiv 12 \ (43)$

$43 \perp 25$ busco combinación entera:

$43 = 25.1 + 18$ $\qquad 1 = 7.43 - 12.25$

$25 = 18.1 + 7$ $\qquad -12 \times \quad 25a \equiv 12 \ (43)$

$18 = 7.2 + 4$ $\qquad \boxed{a \equiv 28 \ (43)}$

$7 = 4.1 + 3$

$4 = 3.1 + 1$

Vimos 4 casos posibles (A)

$\begin{cases} a \equiv 0 \ (5) \\ a \equiv 0 \ (43) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a \equiv 0 \ (5) \\ a \equiv 28 \ (43) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a \equiv 2 \ (5) \\ a \equiv 0 \ (43) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a \equiv 2 \ (5) \\ a \equiv 28 (43) \end{cases}$

por TCR $\boxed{a \equiv 0 \ (215)}$

$5y \equiv 28 \ (43)$

$40 \times \quad y \equiv 40 \ (43)$

$\boxed{a \equiv 5.40 \equiv 200 \ (215)}$

$2 \times \quad 43y \equiv 2 (5)$

$y \equiv 4 \ (5)$

$\boxed{a \equiv 43.4 \equiv 172 \ (215)}$

NOTA

HOJA N°

FECHA

A) $a \equiv 200 + 172 \equiv 372 \equiv 157 \ (215)$

$\Rightarrow$ por TCR separé en $\begin{cases} a \equiv 0 \ (5) \\ a \equiv 28 \ (43) \end{cases}$ y $\begin{cases} a \equiv 2 \ (5) \\ a \equiv 0 \ (43) \end{cases}$

RTA = $a \equiv 0 \ (215)$, $a \equiv 200 \ (215)$, $a \equiv 172 \ (215)$, $a \equiv 157 \ (215)$

4) raíz ϕ = bi

$P(bi) = (bi)^5 - (bi)^4 + 4(bi)^3 - 7(bi)^2 - 5bi - 10.$

$= b^5 i - b^4 - 4b^3 i + 7b^2 - 5bi - 10$

para que sea raíz tiene que ser igual a 0.

$b^5 i \underbrace{- b^4} - 4b^3 i \underbrace{+ 7b^2} - 5bi \underbrace{- 10} = 0.$

$\underbrace{b^5 i - 4b^3 i - 5bi}_{② = 0} \quad \underbrace{- b^4 + 7b^2 - 10}_{① = 0} = 0$

① $y = b^2 \qquad -y^2 + 7y - 10 = 0.$

Uso la resolvente.

$$x_1, x_2 = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4.(-1).(-10)}}{-2} \rightarrow x_1 = \frac{-7+3}{-2} = \boxed{2}, \quad x_2 = \frac{-7-3}{-2} = \boxed{5}$$

$b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$ o $b = -\sqrt{2}$

$b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$ o $b = -\sqrt{5}$

② $bi(b^4 - 4b^2 - 5) = 0$ si $b \neq 0$ ó $(b^4 - 4b^2 - 5) = 0.$

Uso resolvente $\qquad b^2 = y \qquad y^2 - 4y - 5 = 0$

$$x_1, x_2 = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \rightarrow x_1 = \frac{4+6}{2} = \boxed{5}, \quad x_2 = \frac{4-6}{2} = \boxed{-1}$$

$b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$ o $b = -\sqrt{5}$

$b^2 = -1 \Rightarrow b = i$

① y ② se cumplen cuando $b^2 = 5$.

tengo $f(\sqrt{5}i) = f(-\sqrt{5}i) = 0 \Rightarrow (x - \sqrt{5}i)(x + \sqrt{5}i) = x^2 + 5 \mid P$

$$\begin{array}{l|l}
x^5 - x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 5x - 10 & x^2+5 \\
\hline
-\ x^5 \qquad + 5x^3 & x^3 - x^2 - x - 2 \\
\quad -x^4 - x^3 - 7x^2 - 5x - 10 & \\
-\ -x^4 \qquad - 5x^2 & \\
\quad\quad -x^3 - 2x^2 - 5x - 10 & \\
\quad -\ -x^3 \qquad - 5x & \\
\quad\quad\quad -2x^2 - 10 & \\
\quad\quad -\ -2x^2 - 10 & \\
\quad\quad\quad\quad 0 &
\end{array}$$

NOTA

$$P = (X^2+5)\,(\underbrace{X^3-X^2+X-2}_{g})$$

Busco raíces $\mathbb{Q}$ con Gauss.

candidatos $= \{\pm 1, \pm 2\}$

$g(1) \neq 0 \qquad g(-1) \neq 0 \qquad g(2) = 0 \qquad g(-2) \neq 0$

2 es raíz $\quad X-2 \mid g$

$$\begin{array}{rl|l}
 & X^3 - X^2 - X - 2 & X-2 \\ \cline{3-3}
- & X^3 - 2X^2 & X^2+X+1 \\ \cline{2-2}
 & X^2 - X - 2 & \\
- & X^2 - 2X & \\ \cline{2-2}
 & X - 2 & \\
- & X - 2 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

$$P = (X^2+5)\,(X-2)\,(\underbrace{X^2+X+1})$$

$\Delta = 1^2 - 4.1 = -3 < 0 \;\therefore$ No tiene raíces $\mathbb{R}$.

factorización en $\mathbb{Q}[X]$ y en $\mathbb{R}[X]$.

$$\underbrace{(X^2+5)}_{\text{No tiene raíces en } \mathbb{Q}}\;\underbrace{(X-2)}_{\text{grado 1}}\;\underbrace{(X^2+X+1)}_{\text{No tiene raíces en } \mathbb{Q}}$$

es irreducible por:

Busco raíces a X^2+X+1

$$\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \rightarrow \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

factorización en $\mathbb{C}[X]$

$$(X-\sqrt{5}i)(X+\sqrt{5}i)(X-2)\left(X-\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\right)\left(X-\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\right)$$

es irreducible porque son términos de grado 1.