Segundos Parciales

Álgebra I

Matemática - Computación

Escrito y editado por: Gabriel R. (Estudiante de Lic. en Ciencias Matemáticas – FCEN UBA)

Introducción

En este documento te ofrezco algunos **segundos parciales** tomados en cuatrimestres anteriores en la materia de: **Álgebra I**, para las carreras de: Matemática y Computación. Esta materia se dicta en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

También te muestro los temas que entran para el segundo parcial y la bibliografía recomendada por los docentes. Si buscás más info de la materia como fechas de exámenes, cursos y turnos disponibles, guías de ejercicios, etc. visitá la página oficial desde: cms.dm.uba.ar/academico/materias/

Podés encontrar más parciales en la fotocopiadora del Pabellón I (de ahí los saqué).

Temas del Programa que entran para el Segundo Parcial

cms.dm.uba.ar/academico/lic/programas/algebraI

1) Enteros, divisibilidad. Algoritmo de división. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Primos. Teorema fundamental de la aritmética. Factorización. Congruencias. Sistemas de numeración. Racionales e irracionales.
2) Números complejos. Forma trigonométrica. Teorema de De Moivre. Raíces n-ésimas.
3) Polinomios. Teorema del resto. Divisibilidad. Raíces, multiplicidad. Teorema de Gauss.

Régimen de Aprobación

Se deben aprobar los dos exámenes parciales. Para los alumnos que desaprueben alguno o ambos exámenes, habrá dos fechas de recuperación al finalizar el cuatrimestre. Se podrá rendir un solo parcial por fecha de recuperatorio, pudiendo los alumnos elegir cuál examen recuperar en cada fecha.

Bibliografía

La **bibliografía oficial** recomendada para la materia es:

- Notas de las clases teóricas de Teresa Krick: Capítulo 1, Capítulo 2, Capítulo 3, Capítulo 4, Capítulo 5
- Notas de Ariel Pacetti y Matías Graña- PDF
- Conjuntos, relaciones y funciones, por Susana Puddu- PDF
- Números naturales, principio de inducción, por Susana Puddu- PDF
- Combinatoria, por Susana Puddu- PDF
- Números enteros, por Susana Puddu- PDF
- Números enteros, por Teresa Krick- PDF
- Números complejos, por Susana Puddu- PDF
- Polinomios, por Susana Puddu- PDF
- E. Gentile. Notas de Algebra (EUDEBA)
- E. Gentile. Estructuras algebraicas I. (Public. OEA)
- Birkhoff-Mc Lane. Algebra moderna.

Links de interés

Susana Puddu: mate.dm.uba.ar/~spuddu/Ppal.html

Teresa Krick: www.dm.uba.ar/materias/algebra_1/2004/1/

TEMA 1

1	2	3	4	5	6

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA – RECUPERATORIO DEL SEGUNDO PARCIAL (19/12/01)

1.– Resolver el sistema de ecuaciones de congruencia

$$\begin{cases} 55\,x \equiv 30 & (\text{mod } 60) \\ 5\,x \equiv 2 & (\text{mod } 8) \\ 10\,x \equiv 180 & (\text{mod } 66) \end{cases}$$

2.– Caracterizar los $a \in \mathbb{Z}$ que verifican que $(5a^{98} - a : 7a) \neq a$.

3.– Sean $z, \omega \in G_5$. Probar que $(z^{16} + \omega^{41})^5 \in \mathbb{R}$.

4.– Determinar para qué valores de $a, b \in \mathbb{Z}$ el polinomio

$$2aX^3 + 9bX^2 - 60X - (250a + 225b - 300)$$

admite a 5 como raíz múltiple, y para esos valores factorizar el polinomio en $\mathbb{Q}[X]$.

5.– Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que verifican simultáneamente

$$|\,z^3\,| = 3\,|\,\overline{z}\,| + 2 \quad \text{y} \quad 2\,z^5 = (1 + \sqrt{3}\,i)\overline{z}^5.$$

6.– Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y sea

$$f = 3\,X^{120} + \sqrt{6}\,X^{19} + \beta\,X^{11} + \sqrt{6}\,X^9 + 3X^2 + \alpha \quad , \quad g = \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad r = 5X + 2.$$

Determinar los valores de α y β para los cuales el resto de dividir f por g sea r.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	5	6

TEMA 1

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA I – SEGUNDO PARCIAL (9/12/02)

1. Determinar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $(z^2 - 4)^3 = (1+i)^3 (z+2)^3$.

2. Sea $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio que satisface

$$f(2) = 1, \quad f'(2) = 2 \quad \text{y} \quad f(3) = 3$$

Hallar el resto de la división de f por $X^3 - 7X^2 + 16X - 12$.

3. Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $7a \equiv 2 \ (8)$ y $6a \equiv 48 \ (10)$.

4. Hallar la suma de las raíces primitivas de G_{16}

5. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $a^{14} \equiv 3^{62} \ (13)$.

6. Hallar todos los $w \in \mathbb{C}$ tales que w es raíz **doble** del polinomio

$$X^4 - (w+4)X^3 + (4w-3)X^2 + (3w+18)X - 18w$$

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	5	6

TEMA 1

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA I – RECUPERATORIO DEL SEGUNDO PARCIAL (23/12/02)

1. Hallar todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que $(X-1)\,f^2 + 2X = X^3 + X\,f - 1$.

2. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $11 \mid n$, $(n : 1890) = 90$ y n tiene 36 divisores positivos.

3. Determinar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $|\,(1+i)\,\overline{z})\,| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y $\arg(2iz^5) = \arg(1-i)$.

4. Factorizar sobre $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio

$$X^5 + 5X^4 + 8X^3 + 5X^2 + X - 2$$

sabiendo que la suma de cuatro de sus raíces es $-4+\sqrt{2}$.

5. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $3^n \equiv 5\ (11)$ y $2^n \equiv 13\ (17)$.

6. Para cada $w \in G_5$ calcular

$$w^{22} + 4w^{43} + \overline{w}^{\,71} + w^{-84} - 3(\overline{w}^{\,13})^{-1} + 3$$

Justifique todas sus respuestas.

Algebra I - Primer Cuatrimestre 2003

Segundo Parcial - Tema 1

29/07/2003

Apellido y nombre:

Número Libreta:

Turno Práctica:

Turno Teórica:

1	2	3	4	Calif.

(1) Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales el polinomio
$$X^{150} - 5aX^{30} + 8a$$
tiene al menos una raíz múltiple.

(2) Factorizar en $\mathbb{R}[X]$ y en $\mathbb{C}[X]$ el polinomio
$$X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 4X + 2$$
sabiendo que tiene como raíz una raíz cúbica de 1.

(3) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que
$$2^{5n} \equiv 3n \ (16.17)$$

(4) Sea n un número natural que cumple que
$$\frac{(-2+2i)^{9n+2}}{1-i}$$
es un número real negativo. Calcular todos los posibles restos de dividir a n por 8.

Justificar todas las respuestas

1	2	3	4	5

TEMA 1

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA – SEGUNDO PARCIAL (6/12/03)

1.– Para cada valor de $a \in \mathbb{Z}$, calcular
$$(4a^2 + 21 : 245).$$

2.– Calcular el resto de dividir por 68 al número
$$\sum_{k=1}^{100} 2^{k!}.$$

3.– Determinar la forma trigonométrica de todos los $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ que verifican que
$$-i\,z^3 = (1+i)\,\overline{z}^2.$$

4.– Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales el polinomio
$$X^5 + \frac{5}{2}\,a\,X + a$$
admite al menos una raíz múltiple. En cada caso hallado, determinar cada raíz múltiple y su multiplicidad (no se pide encontrar las raíces simples).

5.– Factorizar en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio
$$X^6 + 2X^5 + 4X^4 + X^2 + 2X + 4,$$
sabiendo que las raíces octavas primitivas de 1 son raíces del polinomio.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	5

TEMA 1

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA – RECUPERATORIO SEGUNDO PARCIAL (13/12/03)

1.– Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos. Mostrar que si $(a:b) = 3$, entonces

$$(5^2 a^3 b : a^4 + b^4) = 3^4.$$

2.– Hallar todos los enteros a que satisfacen simultáneamente

$$\begin{cases} 6\,a \equiv 2^{117} \pmod{20} \\ 14\,a \equiv 3 \pmod{15} \end{cases}$$

3.– Determinar la forma binomial (o binómica) de todos los $z \in \mathbb{C}$ que verifican que

$$z^2 + 1 = (z - i)^7 (z + i).$$

4.– Determinar la cantidad de raíces **distintas** que tiene en $\mathbb{C}$ el polinomio

$$X^{15} - 15\,X - 14.$$

5.– Determinar para qué valores de a el polinomio

$$X^3 - 2\,a\,X^2 - a^2 X + 2\,a$$

tiene dos raíces cuyo producto es igual a 2. Para cada valor de a hallado, factorizar el polinomio correspondiente en $\mathbb{C}[X]$.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	5

TEMA 1

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA – RECUPERATORIO SEGUNDO PARCIAL (20/12/03)

1.– Determinar los números naturales $n < 1000$ tales que $(n : 360) = 8$ y n admite exactamente 12 divisores positivos.

2.– Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ para los cuales el número $\dfrac{a^{602} - 1}{14}$ es un número entero par.

3.– Determinar la forma trigonométrica de todos los $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ tales que

$$\overline{z}^4 + z^2(2 - 2\,i)\,|z| = 0.$$

4.– Factorizar en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio $X^4 - X^3 + 5\,X^2 - 4\,X + 4$ sabiendo que tiene una raíz en común con el polinomio $X^5 + X^4 + 5\,X^3 + 4\,X^2 + 4\,X$.

5.– Sean α, β y γ las raíces del polinomio $X^3 - 3\,X + 1$. Determinar un polinomio mónico de grado 3 cuyas raíces sean $1 - \alpha^{-1}$, $1 - \beta^{-1}$ y $1 - \gamma^{-1}$.

Justifique todas sus respuestas.

Tema 1

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA 1 – SEGUNDO PARCIAL (12/7/04)

(1) Calcular, en función de $a \in \mathbb{Z}$, los distintos valores de $(a^2 - 1 : a^3 + a^2 - a + 19)$.

(2) Sea $A = 6 + 6^2 + 6^{2004}$. Calcular el resto de dividir 5^A por 247 (notar que $247 = 13 \cdot 19$).

(3) Determinar y dibujar en el plano complejo todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$z^5 \bar{z} + z\,\bar{z} = 9 + 9z^4.$$

(4) Factorizar $f = 3x^5 + 5x^4 + x^3 - x^2 - 3x + 1$ en $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$, sabiendo que **no** es coprimo con $x^4 + 3x - 2$.

(5) Sea $f = x^{20} + 8x^{10} + 2\,a$. Encontrar todos los valores de $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f admite al menos una raíz múltiple. Para cada valor hallado, determinar cuántas raíces distintas tiene f y con qué multiplicidades (no es necesario escribir explícitamente las raíces).

Justifique todas sus respuestas.

Tema 2

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA 1 – RECUPERATORIO SEGUNDO PARCIAL (21/07/04)

(1) Probar que cualquiera sea $a \in \mathbb{Z}$, $(a^{180} + a^2 + 18 : 19^2) = 1$.

(2) Resolver el sistema de ecuaciones de congruencia en $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} 2x \equiv 24 \pmod{90} \\ 5x \equiv 12 \pmod{21} \end{cases}$$

(3) Determinar y graficar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen que

$$0 \leq \arg\left(\frac{z^4}{i}\right) \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \left|\frac{z^4}{i}\right| \leq 16.$$

(4) Factorizar en $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$ el polinomio $x^6 - 2x^4 - 4x^2 + 8$ sabiendo que tiene raíces múltiples.

(5) Sea $f = x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 27$. Encontrar a y b de tal manera que la suma de dos de las raíces de f sea 4 y el producto de las otras dos sea 3.

Justifique todas sus respuestas.

Tema 2

1	2	3	4	5

Apellido y Nombre:

Turno: No. de libreta: Carrera:

ALGEBRA 1 – Recuperatorio Segundo Parcial (30/07/04)

(1) Describir todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(2^2 \cdot 7 \cdot n : 2 \cdot 3^5 \cdot 7^{10}) = 2 \cdot 3 \cdot 7^{10}$ y n tiene 40 divisores positivos.

(2) Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $77 \mid 30\, a^{211} + 70$.

(3) Hallar todos los $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ tales que $z^4 = -i\overline{z}^2$ y $\pi \leq \arg(z^2) < 2\pi$.

(4) Determinar todos los primos positivos p para los cuales el polinomio $x^4 - 3x^3 - x^2 + 2p^2x - p^2$ admite al menos una raíz racional positiva, y para cada valor hallado factorizar el polinomio en $\mathbb{Q}[x]$.

(5) Sea $f = x^3 - 9x^2 + a\,x - 65$ con $a \in \mathbb{R}$. Determinar el valor de a para el cual el polinomio f admite una raíz compleja no real cuya parte real es igual a 2 y factorizar el polinomio obtenido en $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$.

Justifique todas sus respuestas.

Algebra I
Segundo Examen Parcial (06-12-04)

Nombre y apellido:
Turno:

1	2	3	4	5

Tema 1

1. Calcular el resto de dividir $\frac{11^{20!}-1}{2}$ por 9196.

2. Determinar la forma binómica de los números complejos z tales que $\arg(z) = \arg(z^3) + \pi/2$ y $|z| = 2$.

3. Sea $w \in G_7$, $w \neq 1$. Probar que $(w^{16} - w^5 + w^{29} - \overline{w} - w^{-18} + w^{11})^3$ es imaginario puro.

4. Demostrar que el polinomio $X^{2n} - nX^2 + n - 1$ es divisible por $X^3 + X^2 - X - 1$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

5. Sea $f = 2X^6 - 11X^5 + 14X^4 + 26X^3 - 70X^2 + 21X + 30$. Factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que tiene una raíz común con el polinomio $X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 5$.

Nota. Justifique debidamente todas sus respuestas.

Algebra I
Segundo Examen Parcial (06-12-04)

Nombre y apellido:
Turno:

1	2	3	4	5

Tema 2

1. Calcular el resto de dividir $\frac{13^{20!}-1}{2}$ por 11492.

2. Determinar la forma binómica de los números complejos z tales que $\arg(z) = \arg(z^3) - \pi/2$ y $|z| = 2$.

3. Sea $w \in G_7$, $w \neq 1$. Probar que $(w^{-3} - w^{26} - w^6 + \overline{w}^5 + w^{36} - w^{17})^5$ es imaginario puro.

4. Demostrar que el polinomio $X^{2n+1} - nX^2 - X + n$ es divisible por $X^3 - X^2 - X + 1$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

5. Sea $f = 2X^6 - 11X^5 + 23X^4 - 19X^3 - 39X^2 + 82X - 30$. Factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que tiene una raíz común con el polinomio $X^4 - 2X^3 + 7X^2 - 4X + 10$.

Nota. Justifique debidamente todas sus respuestas.

Algebra I
Recuperación Segundo Parcial (14-12-04)

Nombre y apellido:
Turno:

1	2	3	4	5

Tema 1

1. Hallar el mínimo $n \in \mathbb{N}$ tal que $260 \mid 2^{100} + n$.

2. Hallar la forma binómica de todos los números complejos z tales que $\arg(z^3) = \pi/2$ y $|z^3| - 10|z| = 3|z^2| - 24$.

3. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 2$. Determinar el número de soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación
$$z^n = -\overline{z}^2.$$

4. Determinar $a \in \mathbb{R}$ de manera que el polinomio
$$f = X^6 + aX^5 - 2X^3 - 21X^2 - 5a^3X - 20$$
admita a -1 como raíz múltiple. Factorizar entonces f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

5. Sean a, b y c las raíces del polinomio $X^3 - 2X^2 + 5$. Hallar un polinomio g de grado 3, con coeficiente principal 2, cuyas raíces sean ab, ac y bc.

Nota. Justifique debidamente todas sus respuestas.

Algebra I
Recuperación Segundo Parcial (14-12-04)

Nombre y apellido:
Turno:

1	2	3	4	5

Tema 2

1. Hallar el mínimo $n \in \mathbb{N}$ tal que $280 \mid 2^{100} + n$.

2. Hallar la forma binómica de todos los números complejos z tales que $\arg(z^3) = 3\pi/2$ y $\left|z^3\right| + 24 = \left|z^2\right| + 14\,|z|$.

3. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 2$. Determinar el número de soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación
$$z^n = i\overline{z}^2.$$

4. Determinar $a \in \mathbb{R}$ de manera que el polinomio
$$f = X^6 - 2X^5 - aX^4 - 2X^3 - 11X^2 - 3a^3X - 12$$
admita a 1 como raíz múltiple. Factorizar entonces f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

5. Sean a, b y c las raíces del polinomio $X^3 - 3X + 1$. Hallar un polinomio g de grado 3, con coeficiente principal 3, cuyas raíces sean ab, ac y bc.

Nota. Justifique debidamente todas sus respuestas.

Algebra I
Recuperación Segundo Parcial (22-12-04)

Nombre y apellido:
Turno:

1	2	3	4	5

Tema 1

1. Si $a \in \mathbb{Z}$, determinar los posibles valores del resto de dividir $7a^{100} - 3$ por 55.

2. Hallar módulo y argumento de todos los números complejos z que satisfacen la ecuación
$$(1-z)^4 = (1/2 - z)^2.$$

3. Sea w una raíz duodécima primitiva de 1. Probar que
$$\mathrm{Re}(w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5) = 0.$$

4. Exhibir un polinomio $g \in \mathbb{Q}[X]$, de grado mínimo, satisfaciendo simultáneamente las siguientes condiciones:
   i) $(g : g') = X^8 + X^6$
   ii) $g(1 - \sqrt{2}) = 0.$

5. Factorizar en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio
$$X^6 - X^5 + 3X^4 - 4X^3 - 4X - 4,$$
sabiendo que tiene dos raíces cuya suma es 0 y cuyo producto es 2.

Nota. Justifique debidamente todas sus respuestas.

Algebra I
Recuperación Segundo Parcial (22-12-04)

Nombre y apellido:
Turno:

1	2	3	4	5

Tema 2

1. Si $a \in \mathbb{Z}$, determinar los posibles valores del resto de dividir $5a^{96} - 9$ por 119.

2. Hallar módulo y argumento de todos los números complejos z que satisfacen la ecuación
$$(z + 1/2)^2 = (z + 1)^4.$$

3. Sea w una raíz décima primitiva de 1. Probar que
$$\mathrm{Re}(w + w^2 + w^3 + w^4) = 0.$$

4. Exhibir un polinomio $g \in \mathbb{Q}[X]$, de grado mínimo, satisfaciendo simultáneamente las siguientes condiciones:

   i) $(g : g') = X^7 + 4X^5$

   ii) $g(\sqrt{3} + 1) = 0.$

5. Factorizar en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio
$$X^6 + X^5 + 5X^4 + 6X^3 + 3X^2 + 9X - 9,$$
sabiendo que tiene dos raíces cuya suma es 0 y cuyo producto es 3.

Nota. Justifique debidamente todas sus respuestas.

Algebra I - Segundo Parcial

12 de Julio de 2005

(1) Sea $\omega \in G_{11}$. Calcular la parte real de $(\omega^{29}+1)(\overline{\omega}^{18}-1)$.

(2) Decidir para qué valores de $a \in \mathbb{C}$ el polinomio $f = x^{12} - 12x + a$ **no** tiene raíces múltiples.

(3) Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a^{55} - 3 : 56) = 28$. Hallar el resto de la división de a por 56.

(4) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $(z \bar{+} i)^4 = (2+2i)^4$

(5) Hallar todas las soluciones de la siguiente ecuación de congruencia

$$2^{123}x^2 \equiv 2 \mod 26$$

(6) Factorizar sobre $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio $f = x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 2x + 52$ sabiendo que no tiene raíces reales y que tiene una raíz compleja z con $|z| = \sqrt{13}$ y otra w con $\arg(w) = \frac{2\pi}{3}$.

Nota. Justifique debidamente todas sus respuestas.

Nombre y Apellido:
Número de libreta:
Turno:

Algebra I - 2005 - Primer Cuatrimestre
1er. Recuperatorio del Segundo Parcial
Tema 1
19/07/2005

(1) Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales
$$f = x^{120} - 6kx^{20} + 10k$$
tiene alguna raíz múltiple.

(2) Caracterizar
$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1 \text{ y } arg(z^3) = arg(-z)\}$$

(3) Sea $\omega \neq 1$, $\omega \in G_5$. Probar que si ω es raíz del polinomio
$$f = 2x^{2n+2} + x^{2n} - 2x^2 - 1$$
entonces $5 \backslash n$. Si $\nu \in G_6$ y $\nu \neq 1$, ¿vale que $6 \backslash n$?

(4) Hallar todos los enteros a, b que verifican simultáneamente:
$$(a : b) = b - 2a, \quad [a : b] = 83a, \quad 200 \leq a, b \leq 600$$

(5) Sea $a \in \mathbb{Z}$. Hallar el resto de a en la división por 70 sabiendo que es impar y que $(3a^{13} + 10 : 280) = 35$.

(6) Sea $f = X^6 - 3X^4 - (2 + 3i)X^3 + 9iX + 6i \in \mathbb{C}[X]$. Hallar todas las raíces de f en $\mathbb{C}$ sabiendo que f tiene (al menos) una raíz real.

POR FAVOR, JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

Nombre y Apellido:
Número de libreta:
Turno:

Algebra I - 2005 - Primer Cuatrimestre
2do. Recuperatorio del Segundo Parcial
Tema 1
28/07/2005

(1) Factorizar sobre $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$, y $\mathbb{C}$ el polinomio $f = x^4+x^3-3x^2+4x-2$ sabiendo la suma de tres de sus raíces es $-3/2 + i \cdot \sqrt{3}/2$.

(2) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $(z^2+9)^4 = ((1+i)(z-3i))^4$.

(3) Calcular $w + \overline{w} + (w+w^2)^2 - w^{38}(1-w^2)$ para cada $w \in G_7$.

(4) Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que a sea raíz doble de $X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2+3a)X - 2a$.

(5) Determinar todos los divisores positivos de 2^{73} que sean congruentes a 3 módulo 11.

(6) En ocasión de un espectáculo floklórico, los integrantes de un grupo de danza se agrupan primero en varios círculos de 15 bailarines cada uno y un pequeño círculo de 5. Luego se dispersan para formar filas de 28 personas cada una, mientras que 9 personas improvisan delante de las filas. Finalmente bailan en semicírculos de 31 bailarines con 3 solistas delante de los círculos. Cuál es el número mínimo de integrantes del grupo?

POR FAVOR, JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1	2	3	4	5	6

TEMA 2

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA I – SEGUNDO PARCIAL (03/12/05)

1. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $a \equiv 5\ (7)$ y $r_9(33a+5) = r_9(4a-7)$

2. Probar que $\dfrac{11^{1464}-1}{52}$ es un número entero par.

3. Graficar en el plano complejo

$$\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \ / \ |\operatorname{Re}(z) + i(z - \overline{z})| \leq 3 \text{ y } \pi \leq \arg(z^2) \leq \frac{3}{2}\pi\}$$

4. Hallar todos los $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $z^2 - (4-i)z + 3 - 3i = 0$ y $z^3 = i\,w^3$

5. Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$ las raíces de $f = X^3 + 7X^2 - 2X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Calcular

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}$$

6. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que a sea raíz doble del polinomio

$$f = X^4 - (a+1)X^3 + (a+2)X^2 - 2(a+1)X + 2a$$

POR FAVOR, JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1	2	3	4	5	6

TEMA 2

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA I – PRIMER RECUPERATORIO DEL SEGUNDO PARCIAL (12/12/05)

1. Determinar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(2^{n+2} + 5.7^{1200} : 3.2^n + 7^{1201}) \neq 1$

2. Sea a un entero que satisface $17a \equiv 3\ (11)$ y $8a \equiv 6\ (34)$. Hallar el resto de la división de a por 187.

3. Graficar en el plano complejo
$$\{z \in \mathbb{C} \,/\, 1 \leq |z+i| \leq 2 \text{ y } 2\mathrm{Re}(-z) \geq \mathrm{Im}(iz) + 3\}$$

4. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^4 = (1+i)\,\overline{z}^2$

5. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$ y en $\mathbb{R}[X]$ el polinomio
$$f = X^8 + 2X^7 - 2X^6 - 3X^5 + 5X^4 + 6X^3 - 6X^2 - 9X + 6$$
sabiendo que las raíces cuartas de -3 son raíces de f.

6. Sean a, b y c las raíces de $X^3 - 3X^2 + X - 1$. Hallar un polinomio $f \in \mathbb{Z}[X]$ de grado 3 cuyas raíces sean ab, ac y bc

POR FAVOR, JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1	2	3	4	5	6

TEMA 2

Apellido y nombre:

Turno: No. de libreta: Carrera:

ALGEBRA I – SEGUNDO RECUPERATORIO DEL SEGUNDO PARCIAL (21/12/05)

1. Hallar todos los $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tales que $(a:b) = 15$ y $a^2 b = 2^3.3^4.5^3.7^2$

2. Sea p un primo, $p > 2$. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(2^{p-2}a+1 : 2^p a+p+4) \neq 1$

3. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^6.\overline{z} = 8\,|z|^4$

4. Hallar la suma de las raíces primitivas de G_9

5. Hallar todas las raíces complejas de

$$f = X^3 - (\frac{1}{6} + i)X^2 + (6 + \frac{1}{6}i)X - 1$$

sabiendo que f tiene una raíz real.

6. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + (a-2)X^4 + (4-2a)X^3 + (a-8)X^2 + (3-2a)X - 2$$

tiene una raíz racional múltiple.

POR FAVOR, JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA: TURNO: 8 a 13 14 a 17 20 a 22 **TEMA 1**

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2010
2º Parcial (6/12/2010)

1. Sea $a \in \mathbb{Z}$. Se sabe que el resto de dividir a a por 36 es igual a 10 y el resto de dividir a a por 10 es igual a 6. Calcular los posibles restos de dividir a a por 360.

2. Determinar todos los primos p positivos para los cuales
$$p \mid 25^{p^2-p} + 35^{p^3}.$$

3. Calcular todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen
$$z^2 + (\sqrt{3} + i)\, |z|\, \overline{z}^2 = 0.$$

4. Factorizar el polinomio
$$f = X^6 - X^5 + 5X^4 - 6X^3 + 3X^2 - 9X - 9$$
en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que tiene una raíz múltiple de argumento $\frac{\pi}{2}$.

5. Determinar para qué valores de $a \in \mathbb{C}$ el polinomio
$$X^3 - aX^2 - 4a^2X + 4a$$
tiene dos raíces cuyo producto es igual a -4.
Para cada valor hallado, factorizar el polinomio obtenido en $\mathbb{C}[X]$.

Justifique todas sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA: TURNO: 8 a 11 14 a 17 20 a 22

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2010
1er Recuperatorio – 2º Parcial (10/12/2010)

1. Hallar el menor número natural n que satisface que $(n : 360) = 8$ y n tiene exactamente 12 divisores positivos.

2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones de congruencia en $\mathbb{Z}$:
$$\begin{cases} 6\,a & \equiv & 2^{117} & \pmod{20} \\ 14\,a & \equiv & 3^{85} & \pmod{15} \end{cases} .$$

3. Describir todos los $z \in \mathbb{C}$ (z no nulo) que satisfacen que la parte real de
$$\frac{(1+\sqrt{3}\,i)\,|z|\,z^3}{\overline{z}}$$
es estrictamente negativa.

4. Dado $n \in \mathbb{N}$, probar que la multiplicidad de 1 como raíz del polinomio
$$(X^{10} - 2X^9 + X^8)^n + X^{n+3} - X^{n+2} - X^{n+1} + X^n \quad \in \ \mathbb{Q}[X],$$
es 2. Encontrar, además, la multiplicidad de 0.

5. Se sabe que el polinomio
$$f = X^4 - aX^2 + 9,$$
donde a es un *número entero*, tiene una raíz en común con $2X^3 - 5X^2 + 8X - 3$.
Hallar los posibles valores de a y factorizar los polinomios f obtenidos en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

Justifique todas sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA: TURNO: 8 a 11 14 a 17 20 a 22

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2010
2do Recuperatorio – 2º Parcial (15/12/2010)

1. Determinar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $[n : 36] = 15 \cdot 36$ y calcular la suma de todos los divisores positivos del valor más grande hallado.

2. Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ que satisfacen que
$$(5\,a^7 + 2 \ : \ 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7) = 3 \cdot 7.$$

3. Calcular todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen
$$(z^2 - 4)^3 = (z - i)^3 (z + 2)^3.$$

4. Calcular todos los $a \in \mathbb{Q}$ para los cuales el polinomio
$$f = X^4 - \frac{4}{3}X^3 - 2X^2 + 4X + a$$
tiene al menos una raíz múltiple racional, y para cada a hallado factorizar el polinomio f obtenido en $\mathbb{C}[X]$.

5. Se sabe que el polinomio
$$X^3 + 3X - 10\sqrt{2}\,i$$
tiene dos raíces complejas que suman $2\sqrt{2}\,i$. Factorizarlo en $\mathbb{C}[X]$.

Justifique todas sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA: TURNO: 11 a 14 | 14 a 17 | 20 a 22 **TEMA 2**

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2011
2do Parcial (6/12/2011)

1. Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ que satisfacen

$$165 \mid 4a^{10} - a^{30} + 33.$$

2. Graficar en el plano complejo el conjunto de todos los $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, que satisfacen

$$\frac{\pi}{4} \leq \arg\left((-1-i)z^3\right) \leq \frac{3\pi}{4}.$$

3. Sea $\omega \in \mathbb{C}$ una raíz 7-ma de 1, $\omega \neq 1$.
   (a) Probar que $z = \omega + \omega^2 + \omega^4$ es raíz del polinomio $f = x^2 + x + 2$.
   (b) Expresar la otra raíz del polinomio f como suma de potencias de ω.

4. Determinar para qué valores de $a, b \in \mathbb{C}$ el polinomio

$$x^4 - ax^2 + b$$

admite raíces múltiples en $\mathbb{C}$, y para cada valor hallado determinar la multiplicidad de cada raíz.

5. Factorizar en $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$ el polinomio

$$f = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x - 12,$$

sabiendo que la suma de tres de sus raíces es igual a $\sqrt{3} + 3$.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA: TURNO: 11 a 14 16 a 19 20 a 22 TEMA 1

Algebra I - 1er Cuatrimestre 2012
Segundo Parcial (6/7/12)

1. Para cada $b \in \mathbb{N}$ determinar el valor de $(5b^{183} + 49 : 350)$.

2. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tal que $r_{1001}(5^n) = 807$, expresado en una sola ecuación de congruencia.

3. Sea $\omega \in G_{24}$ una raíz vigésimocuarta **primitiva** de la unidad, hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\sum_{i=10}^{3n} \overline{\omega}^{3i} = 0.$$

4. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^8 = (1 + z^2)^4$.

5. Factorizar en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio

$$f = X^5 - 4X^3 + 4X^2 + 4X - 8$$

sabiendo que tiene una raíz r cuyo cuadrado r^2 es raíz múltiple del polinomio
$g = 3X^3 - 11X^2 + 8X + 4$.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:

LIBRETA: TURNO: 11 a 14 14 a 17 20 a 22 **TEMA 1**

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2012
Segundo Parcial (3/12/2012)

1. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente

$$(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^3\, z^4 + (1+\sqrt{3}i)^4\, \overline{z}^2 = 0 \quad \text{e} \quad Im(z) \leq 0$$

2. Factorizar el polinomio $f = X^5 - 8X^3 - 3X^2 - 2X + 6$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que tiene una raíz en común con $g = X^3 + 3X^2 + 3X + 2$.

3. Hallar todos los $p \in \mathbb{N}$ primos tales que $p^2 \mid ((12!)^{p-1} + 220 : 168^{3p} + 9660)$.

4. Hallar todos los posibles restos de a módulo 90 sabiendo que

$$(11a^{187} + 4 : 90) = 15.$$

5. Sean α, β y $\gamma \in \mathbb{C}$ las raíces del polinomio $X^3 - 3X^2 + 4X - 5$. Hallar un polinomio de grado 3 con raíces $\alpha\beta, \alpha\gamma$ y $\beta\gamma$.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1	2	3	4	5

Calif.

Apellido y Nombre:

Libreta: Turno: 11 a 14 14 a 17 20 a 22 **TEMA 1**

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2012
Recuperatorio Segundo Parcial (17/12/2012)

1. Sea $f = X^4 - 6X^3 + 11X^2 - 2X - 10$. Factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$. Sugerencia: dos de sus raíces tiene producto igual a -2 y suma igual a 2.

2. Hallar los posibles restos de a módulo 154 sabiendo que $(3a^{26} + 22 : 308) = 77$.

3. Hallar todos los primos posibles positivos p para lo cuales
$$p | 4^{p^2} - \frac{15^p}{3} - 9$$
.

4. Encontrar todos los $z \in \mathbb{C}$ que verifiquen la ecuación
$$z^4 + (1 - i\sqrt{3}) \frac{\overline{z}^2}{|z|^2} = 0$$

5. Sea $P = X^{2811} + X^{1324} - 5X^{563} - 3X^{444} - 4X^2 - 4X - 2$. Probar que $X^4 + 2X^2 + 1$ divide a P.

Justificar todas las respuestas

SEGUNDO PARCIAL DE ÁLGEBRA I

TEMA 1

8 de Julio de 2013

LU N°	Apellido y Nombre	Turno

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Nota

1. Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a^{103} + 11 : 28) = 2$ y $(a^{212} - 16 : 21) = 7$. Calcular el resto de dividir a a por 84.

2. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que:
$$iz^8\overline{z}^3 + 32|z|^6 = 0.$$

3. Sea w una raíz sexta primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que:
$$\sum_{k=0}^{11n} \left(w^{-12} + w^{34} + \overline{w^5} + w^5 + \left(\frac{1}{w}\right)^{10} + \overline{w^{-9}} + w \right)^k = 0.$$

4. Factorizar el polinomio $f = X^6 - 4X^5 + 11X^4 - 20X^3 + 28X^2 - 24X + 12$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que sus raíces dobles son las mismas que las raíces dobles de $g = X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 8X + 4$.

Justifique todas las respuestas.

1	2	3	4	5	6	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

Álgebra I
PREFINAL (15/03/2014)

PARTE 1:

1. Sea $A = \{f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ tal que f es función$\}$.
   Sea $\mathcal{R}$ la relación en A definida por:
   $$f \, \mathcal{R} \, g \iff f(1) = g(1).$$
   a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
   b) Sea $f \in A$ una función dada. ¿Cuántos elementos tiene su clase de equivalencia?

2. Se recuerda que la sucesión de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ está definida por
   $$F_0 = 0, F_1 = 1 \quad \text{y} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$
   Dado $m \in \mathbb{N}_0$, probar que $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_{n-1}F_m$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

3. Sean a, $b \in \mathbb{Z}$ que satisfacen que el resto de dividir a a por b es 140 y el resto de dividir a $3b$ por 140 es 105. Calcular $(a : b)$ y expresarlo como combinación lineal entera de a y b en función de los cocientes q_1 de dividir a a por b y q_2 de dividir a $3b$ por 140.

PARTE 2:

1. Determinar todos los pares a, b de números enteros que satisfacen que
   $$\sum_{k=1}^{100} (a + k\, b) \ = \ 40000.$$

2. Calcular el resto de dividir a $6^{66^{666}}$ por 71.

3. a) Determinar un polinomio mónico cuyas raíces sean exactamente las raíces primitivas de la unidad de orden 6.
   b) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que
   $$X^2 - X + 1 \mid X^{5n} + X^n + 1.$$

Para aprobar es necesario tener por lo menos 1 ejercicio de cada parte Bien.

1	2	3	4	5	6	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

Álgebra I
RECUPERATORIO DEL PREFINAL (20/03/2014)

PARTE 1:

1. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}(X)$ en la forma
$$A \mathcal{R} B \iff A \cup \{1, 3, 5, 7, 9\} = B \cup \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$
   a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y describir por comprensión la clase $\overline{A}$ de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
   b) ¿Cuántos elementos tiene la clase $\overline{A}$ de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente por
$$a_1 = 1 , \quad (n^2 - 2n + 1)a_{n-1} = (n^2 - 1)a_n, \ \forall n \geq 2.$$
   Hallar una fórmula cerrada para a_n y probarla.

3. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 5$.
   a) Calcular los posibles valores de $(ab : 5a - 10b)$ y dar un ejemplo para cada uno de ellos.
   b) Caracterizar para qué $a, b \in \mathbb{Z}$ el máximo común divisor da cada uno de los valores hallados.

PARTE 2:

1. Hallar todos los primos positivos p tales que
$$3^p + 7^{p-1} \equiv -25 (p).$$

2. Sea $\omega \in \mathbb{C}$ una raiz primitiva de la unidad de orden 91. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que
$$\begin{cases} \omega^{14n} & = \omega^7 \\ \omega^{39n} & = \omega^{26}. \end{cases}$$

3. *a*) Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales el polinomio $f = X^6 + aX^3 + 1$ tiene raíces complejas múltiples.
   b) Para cada $a \in \mathbb{R}$ hallado, factorizar f en $\mathbb{C}[X]$ y en $\mathbb{R}[X]$.

Para aprobar es necesario tener por lo menos 1 ejercicio de cada parte Bien.

1	2	3	4	5	6	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

Álgebra I
RECUPERATORIO DEL PREFINAL (27/03/2014)

PARTE 1:

1. Sea $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales pares. Se define la siguiente relación $\mathcal{R}$ en el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de partes de $\mathbb{N}$:
$$A \,\mathcal{R}\, B \Longleftrightarrow (A \cap B) \cup (A' \cap B') \subseteq \mathcal{P}.$$
   a) Analizar si $\emptyset \,\mathcal{R}\, \mathbb{N}$, $\emptyset \,\mathcal{R}\, \mathcal{I}$ y $\mathbb{N} \,\mathcal{R}\, \mathcal{I}$, donde $\mathcal{I} \subset \mathbb{N}$ es el conjunto de los números impares.
   b) Analizar si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente por
$$a_0 = 2 \ , \ a_1 = 3 \ \text{ y } \ a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}, \ \forall n \geq 2.$$
   Hallar una fórmula cerrada para a_n y probarla.

3. Probar que no existen $x, y \in \mathbb{Q}$ que satisfacen la relación $x^2 + y^2 = 3$.

PARTE 2:

1. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que
$$2^n \equiv 38^n \ (70).$$

2. Sea $\omega \in \mathbb{C}$ una raiz primitiva de la unidad de orden 10. Calcular
$$(\omega - 1) \cdot \left(\omega^{104} + \overline{\omega}^3 + \omega^{-9} + \frac{1}{\omega^8} + |\omega|\right).$$

3. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}[X]$ la sucesión de polinomios definida recursivamente por
$$\begin{cases} f_1 &= X^4 - 7X^3 + 18X^2 - 20X + 8, \\ f_{n+1} &= (X+1)f_n(X)^2 + X^5 - 6X^4 + 13X^3 - 14X^2 + 12X - 8, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
   Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, 2 es raiz de f_n de multiplicidad exactamente 3.

Para aprobar es necesario tener por lo menos 1 ejercicio de cada parte Bien.