4 $\boxed{\text{LISTOP}}$

0,80

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)
EXAMEN FINAL
(18/12/03)

NOMBRE Y APELLIDO:
N° DE LIBRETA: N° DE HOJAS ENTREGADAS:
e-mail:

EL EXAMEN FINAL SE APRUEBA CON 50 PUNTOS

ENUNCIAR LAS PROPIEDADES QUE SE UTILIZAN

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1. **(25 puntos)**
   (a) Enunciar y probar el Teorema de probabilidad total.
   (b) Dar un ejemplo de aplicación del teorema.
   (c) Sean A y B eventos de un espacio muestral S. Probar que si A y B son independientes entonces también lo son A y B^c.

2. **(25 puntos)**
   (a) Sea X una variable aleatoria con distribución $\Gamma(\alpha, \lambda)$. Hallar su función generadora de momentos, su esperanza y su varianza.
   (b) Sean $X \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$ e $Y \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$ variables aleatorias independientes. Deduzca la distribución de $X + Y$. ¿Es alguna distribución conocida?

3. **(25 puntos)** Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a. i.i.d. con distribución $N(2, \sigma^2)$.
   (a) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de σ^2. Llamar $\hat{\sigma}^2$ al estimador obtenido.
   (b) ¿Qué distribución tiene el estadístico $T = \dfrac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$? Justificar. SUGERENCIA: recordar que si $Z \sim N(0,1)$ entonces $Z^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
   (c) Hallar el error cuadrático medio de $\hat{\sigma}^2$
   (d) Si tuviese que elegir entre $\hat{\sigma}^2$ y $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$ para estimar σ^2, ¿cuál elegiría? Justificar.

4. **(25 puntos)** Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a. i.i.d. con distribución $B(1, p)$.

(a) Suponga que se desea realizar un test de hipótesis para testear

$$H_o : p = \frac{1}{4} \quad vs \quad H_1 : p > \frac{1}{4}.$$

¿? Proponga un test de nivel aproximado α para decidir entre la dos hipótesis y muestre que el test propuesto tiene el nivel deseado.

(b) Calcular aproximadamente la probabilidad de no rechazar H_o cuando en realidad $p = \frac{1}{3}$.

EX. FINAL 18/12/03

① a) Teorema de la probabilidad total. Sea $A_1, A_2, \dots A_k$ una partición del espacio muestral S, y sea B un suceso cualquiera

Entonces $P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B/A_i) \cdot P(A_i)$

Dem $B = B \cap S = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{k} (B \cap A_i)$

Como $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \phi$ si $i \neq j$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(B/A_i) \cdot P(A_i)$$

def. de prob. condicional.-

b) → ver

c) A y B indep $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

B y B^c son una partic del espacio S

$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$

$P(A) = P(A) \cdot P(B) + P(A \cap B^c)$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)\underbrace{(1 - P(B))}_{P(B^c)}$$

$\Rightarrow A$ y B^c son indep.

húsares

(2) $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty \frac{e^{tx}\, e^{-\lambda x}\, x^{\alpha-1}\, \lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-\overbrace{(\lambda-t)}^{\lambda'} x}\, x^{\alpha-1}\, \lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-(\lambda-t)x}\, x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\lambda^\alpha\, (\lambda-t)^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha}\, dx =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha \cdot \underbrace{\int_0^\infty \frac{e^{-(\lambda-t)x}\, x^{\alpha-1}\, (\lambda-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, dx}_{=1} = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha$$

$=1$ pues es la integral de la dens de una distribución $\Gamma(\alpha, \lambda-t)$

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{+\lambda}{(\lambda-t)^2} = \frac{\alpha \cdot \lambda^\alpha}{(\lambda-t)^{\alpha+1}}$$

$$E(X) = \frac{\partial M_X(0)}{\partial t} = \frac{\alpha \cdot \lambda^\alpha}{\lambda^{\alpha+1}} = \boxed{\frac{\alpha}{\lambda}}$$

Derivo nuevamente y evalúo en $t=0$ para obtener $E(X^2)$

$$\left[\alpha \cdot \lambda^\alpha \frac{1}{(\lambda-t)^{\alpha+1}}\right]' = \frac{\alpha \cdot \lambda^\alpha}{} \cdot \frac{(\alpha+1)(\lambda-t)^\alpha}{(\lambda-t)^{2\alpha+2}}$$

en $t=0$ resulta $E(X^2) = \dfrac{\alpha \cdot \lambda^\alpha (\alpha+1) \lambda^\alpha}{\lambda^{2\alpha+2}} = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \boxed{\frac{\alpha}{\lambda^2}}$$

b) $X \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$

$Y \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$

$$M_{X+Y}(t) \underset{X,Y \text{ indep.}}{=} M_X(t)\, M_Y(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^{\alpha_2} =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}$$

$$\rightsquigarrow X+Y \sim \Gamma(\alpha_1+\alpha_2, \lambda)$$

3) $X_1, \ldots X_n$ m.a. $N(2, \sigma^2)$

$$f_{X_1 \ldots X_n}(x_1 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{(x_i-2)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-2)^2}$$

$$L(\sigma^2) = \ln\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}\cdot\sigma}\right)^n - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-2)^2 = \quad \sigma^{-2}$$

$$= -n\ln(2\sqrt{\pi}\cdot\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-2)^2$$

$$L'(\sigma^2) = -n\frac{1}{2\sqrt{\pi}\cdot\sigma}2\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-2)^2\cdot(-2)\sigma^{-3}$$

húsares

$$L'(\sigma) = -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^{n} (x_i-2)^2 \cdot \frac{1}{\sigma^3} =$$

$$= \frac{-n\,\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n} (x_i-2)^2}{\sigma^3} = 0$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i-2)^2$$

b) $$T = \frac{n \cdot \hat{\sigma}^2}{\sigma^2} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i-2)^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{x_i-2}{\sigma}\right)^2}_{\sim \Gamma(1/2;\,1/2)} \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

c) $$ECM(\hat{\theta}) = E\left((\hat{\theta}-\theta)^2\right) =$$

$$= E\left(\hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta}\theta + \theta^2\right) =$$

$$= E(\hat{\theta}^2) \underbrace{-2\theta E(\hat{\theta}) + \theta^2 + E(\hat{\theta})^2}_{(\text{SESGO})^2} \underbrace{- E(\hat{\theta})^2}_{\text{sumo y resto}}.$$

$$E(\hat{\theta}) - \theta = \text{sesgo}$$

$$E(\hat{\theta})^2 - 2\theta \cdot E(\hat{\theta}) + \theta^2 = (\text{sesgo})^2$$

$$ECM(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + \underbrace{\left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)^2}_{\text{sesgo al cuadrado}} -$$

$$E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i-2)^2\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left((x_i-2)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i^2 - 4X_i + 4\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(E(X_i^2) - 4E(X_i) + 4\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\sigma^2 + 4 - 4\cdot 2 + 4\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{1}{n}\cdot n \cdot \sigma^2 = \sigma^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} X_i \sim N(2,\sigma^2) \quad \Rightarrow \quad E(X_i) = 2 \quad \forall i \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad V(X_i) = \sigma^2 \quad \forall i \\ \qquad\qquad E(X_i^2) - \underbrace{E(X_i)^2}_{4} = \sigma^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow E(X_i^2) = \sigma^2 + 4 \end{array}}$$

Luego $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2$ es un estim. insesgado de σ^2

$$V(T) = V\left(\frac{n\cdot\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) = \frac{n^2}{\sigma^4}\, V(\hat{\sigma}^2)$$

$$\frac{\frac{n}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{n}{2}\cdot 4 = 2n$$

$$\frac{n^2}{\sigma^4}\, V(\hat{\sigma}^2) = 2n$$

$$V(\hat{\sigma}^2) = \frac{\sigma^4 \cdot 2n}{n^2} = \frac{2}{n}\sigma^4$$

$$ECM(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\sigma^4}{n}$$

húsares

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 =$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\sum X_i+n\cdot\overline{X}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2n\overline{X}^2+n\cdot\overline{X}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\cdot\overline{X}^2\right)$$

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-n\,E(\overline{X}^2)\right)$$

$$V(X) = E(X^2)-E(X)^2$$

$$\sigma^2 = E(X^2)-4 \Rightarrow E(X^2) = \sigma^2+4$$

$$V(\overline{X}) = E(\overline{X}^2)-E(\overline{X})^2$$

$$\frac{\sigma^2}{n} = E(\overline{X}^2)-4 \Rightarrow E(\overline{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n}+4$$

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(n(\sigma^2+4)-n\left(\frac{\sigma^2}{n}+4\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2+\cancel{4n}-\sigma^2-\cancel{4n}\right) = \frac{1}{n-1}\sigma^2(n-1) = \sigma^2$$

$\Rightarrow$ S^2 es un estim insesgado de σ^2

Prop. Si $X_1, \dots, X_n$ es m.a. de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$ entonces.

$$\frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} = \Gamma\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Siendo $S^2 = \dfrac{\sum^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

luego $E\left(\dfrac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2}\right) = \dfrac{\frac{n-1}{2}}{\frac{1}{2}} = n-1$

$$\frac{n-1}{\sigma^2}\, E(S^2) = n-1$$

$$E(S^2) = \sigma^2$$

y $V\left(\dfrac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2}\right) = \dfrac{(n-1)^2}{\sigma^4} \cdot V(S^2)$

$$\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}\, V(S^2) = \frac{\frac{n-1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{(n-1)}{2} \cdot 4 = 2(n-1)$$

$$V(S^2) = \frac{2\,\cancel{(n-1)}\cdot\sigma^4}{(n-1)^2} = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

Resumiendo • $\hat{\sigma}^2$ y S^2 son estim insesgados de σ^2

• $ECM(\hat{\sigma}^2) = \dfrac{2\sigma^4}{n}$ $\longrightarrow$ es el que tiene el menor ECM.

• $ECM(S^2) = \dfrac{2\sigma^4}{n-1}$