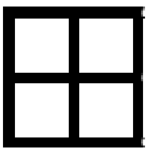
ÁLGEBRA I - 1er. cuatrimestre 2018

FINAL (01/08/18)

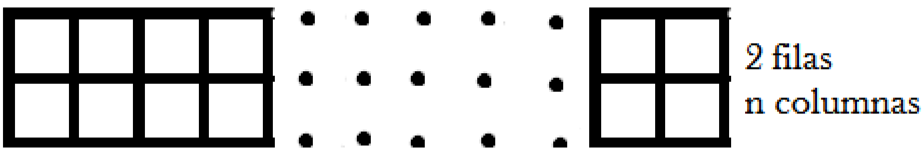
1. Sea $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ la función $f(a, b) = 16a - 10b$. Calcule la imagen de f y halle $f^{-1}(\{6\})$.

2. Se dispone de una caja de lápices de 12 colores diferentes. Usaremos estos lápices para pintar cuadrados de modo tal que cuadrados adyacentes (es decir con lados en común) deben pintarse de colores diferentes.

a) ¿De cuántas maneras es posible colorear los 4 cuadrados de la figura siguiente?



b) Si $n > 2$ ¿De cuántas maneras es posible colorear los $2n$ cuadrados de la figura siguiente?



3. Sean a y b enteros tales que el resto de dividir a por b es 24 y el resto de dividir $3b$ por 72 es 48. Determine $(a : b)$.

4. Calcule la suma de las raíces primitivas de G_{77}.

5. a) Hallar un polinomio mónico f de grado 3 tal que el producto de sus raíces es 2, la suma de las raíces de f' es $-2/3$ y $f(-1) = 1$
b) Factorizar el polinomio hallado en $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

Resolución:

1) $f(a,b) = 16a - 10b \Rightarrow c = 16a - 10b$. Por lo tanto c es la imagen de f.

$c = 16a - 10b$ tiene solución $\iff (16:10)|c \iff 2|c$

$\Rightarrow c = 2k$ (con $k \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow \boxed{2k = Im(f)}$

$16a - 10b = 2k \iff 8a - 5b = k$

$8 \cdot (2) - 5 \cdot (3) = 1 \iff 8 \cdot (2k) - 5 \cdot (3k) = k$

$\Rightarrow 16a - 10b = 2k \iff a = 2k - 5q$ y $b = 3k - 8q$ (con $q \in \mathbb{Z}$)

Por lo tanto:

$16a - 10b = 6$ $(k = 3) \iff (a,b) = (6 - 5q, 9 - 8q)$

$\boxed{f^{-1}(\{6\}) = (6 - 5q, 9 - 8q)}$

2) a) Voy a pensar al cuadrado con las siguientes letras:

$$\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}\right)$$

Vamos a separar en 2 casos, cuando a y d son del mismo color, y cuando a y d son de distinto color.

Cuando son del mismo color, a tiene 12 posibilidades, y d tiene 1 sola (ser igual a a), y b y c terminan teniendo 11 posibilidades cada uno.

$$\left(\begin{array}{c|c} 12 & 11 \\ \hline 11 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo que, por este caso, tenemos $12 \cdot 11^2 \cdot 1$ posibilidades. Veamos el otro caso.

Como a y d son distintos, a tiene 12 posibilidades y d tiene 11 posibilidades, y como b y c tiene que ser distintos a a y a d, cada uno tiene 10 posibilidades.

$$\left(\begin{array}{c|c} 12 & 10 \\ \hline 10 & 11 \end{array}\right)$$

Por lo que, por este otro caso, tenemos $12 \cdot 11 \cdot 10^2$ posibilidades.

$\boxed{\text{En total tenemos } 12 \cdot 11^2 \cdot 1 + 12 \cdot 11 \cdot 10^2 \text{ posibilidades, es decir } \mathbf{14652}.}$

3) $a \equiv 24(b)$ y $3b \equiv 48(72)$

$a \equiv 24(b) \iff a = b \cdot q + 24$ $(q \in \mathbb{Z})$

$3b \equiv 48(72) \iff b \equiv 16(24) \iff b = 24k + 16$ $(k \in \mathbb{Z})$

$(a : b) = (b \cdot q + 24 : b) \underbrace{=}_{propiedad} (24 : b) = (24 : 24k + 16) \underbrace{=}_{propiedad} (24 : 16) = 8$

$\Rightarrow \boxed{(a : b) = 8}$

Propiedad: $(a : b) = (a : b + k \cdot a)$

4) $G_{77} = w_0, w_1, \ldots, w_{76}$

Sé que $G_7 \subseteq G_{77}$ y $G_{11} \subseteq G_{77}$ que ya que $7 \big| 77$ y $11 \big| 77$

Como $(7 : 11) = 1 \Rightarrow G_7 \cap G_{11} = 1$

Pero es erróneo plantear $G_{77} = G_7 \cup (G_{11} - \{1\})$ ya que faltan todos los $w_k \in G_{77}$ con $(k : 77) = 1$, es decir G^*_{77}. Por lo tanto:

$G_{77} = G_7 \cup (G_{11} - \{1\}) \cup G^*_{77}$

$\sum G_{77} = \sum G_7 + \sum G_{11} - 1 + \sum G^*_{77}$

$\boxed{1 = \sum G^*_{77}}$

5) Voy a llamar a, b y c a las raíces de f, y d y e a las raíces de f'. Los datos que tengo son que f es un polinomio mónico de grado 3, $abc = 2$, $f(-1) = 1$ y $d + e = -2/3$

Al ser f un polinomio mónico de grado 3 lo puedo escribir de la siguiente manera:

$f = (x - a)(x - b)(x - c)$

$f = (x^2 - x(a + b) + ab)(x - c) = x^3 - x^2c - x^2(a + b) + x \cdot c(a + b) + xab - abc$

$f = x^3 - x^2(a + b + c) + x(ca + bc + ab) - abc$

$f = x^3 - x^2(a + b + c) + x(ca + bc + ab) - 2$ (Usé el dato de $abc = 2$)

Ahora utilizo el dato $f(-1) = 1$

$f(-1) = 1 = (-1)^3 - (-1)^2(a + b + c) - (ca + bc + ab) - 2$

$1 = -1 - (a + b + c) - (ca + bc + ab) - 2$

$4 = -(a + b + c) - (ca + bc + ab)$

Llamo $a' = a + b + c$ y $b' = ca + bc + ab$

$4 = -a' - b'$

$b' = -4 - a'$

Calculo f':

$f = x^3 - x^2a' + xb' - 2$

$f' = 3x^2 - 2a'x + b'$

$$d, e = \frac{2a' \pm \sqrt{(-2a')^2 - 4 \cdot 3 \cdot b'}}{2 \cdot 3} = \frac{2a' \pm \sqrt{4(a')^2 - 12b'}}{6}$$

$$d + e = -\frac{2}{3} = \frac{2a' + \sqrt{4(a')^2 - 12b'}}{6} + \frac{2a' - \sqrt{4(a')^2 - 12b'}}{6}$$

$$-\frac{2}{3} = \frac{2a' + \sqrt{4(a')^2 - 12b'} + 2a' - \sqrt{4(a')^2 - 12b'}}{6}$$

$-4 = 4a' \Rightarrow \boxed{a' = -1} \Rightarrow b' = -4 - (-1) \Rightarrow \boxed{b' = -3}$

$\Rightarrow f = x^3 + x^2 - 3x - 2$

$\boxed{f = (x + 2)(x^2 - x - 1)}$ Factorizado en $\mathbb{Q}$

$\boxed{f = (x + 2)\left(x - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)\right)}$ Factorizado en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$