Álgebra 1 - Primer Parcial - Tema D

20 de Mayo de 2023

Apellidos: OTAZUA ARCE -
Nombres: MATEO -

Número de Libreta ó DNI: 42.910.872

Turno: TARDE
Carrera: COMPUTACIÓN

1	2	3	4	Nota
B/B	B⁻	B⁻	B⁻	8,5

Pablo Z.

Use hojas distintas para ejercicios distintos. Exhiba todos sus cálculos. Justifique todas sus respuestas. Escriba con tinta y con letra clara y legible.

No se aceptan preguntas: la interpretación de los enunciados es parte del examen.

Ejercicio 1. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 600\}$. Se define en $\mathcal{P}(X)$ la relación dada por

$$A\mathcal{R}B \iff \#(A \triangle B) \leq 2$$

(a) Determinar si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

(b) Si $B = \{n \in X : n \equiv 2023 \; mod \; 21\}$, calcular el cardinal del conjunto

$$\{A \in P(X) : A\mathcal{R}B\}.$$

Ejercicio 2. Calcular el máximo común divisor para cada $n \in \mathbb{Z}$:

$$\left(n^4 - 3n^3 - 8n^2 + 12n + 33 : n^2 - 2n - 8\right)$$

Ejercicio 3. Hallar todos los pares a, b coprimos, $a, b \in \mathbb{Z}$, tales que

$$\frac{2a}{b} - \frac{73a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}.$$

Ejercicio 4. Sea $(a_n)_{n\geq 0}$ la sucesión definida por recurrencia:

$$a_0 = 4, \quad a_{n+1} = 4\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) - 6n^2 + 13n + 16, \;\; \forall \, n \geq 0.$$

Probar que

$$a_n > 5^n + 3n - 4 \;\; \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

resuelto en 4 hojas

AZUA ARCE, MATEO (42.910872)

1er PARCIAL
TEMA D

EJERCICIO 1

NUNCA MÁS ORGANICES ASÍ UNA RESPUESTA DE PARCIAL (HAY OTROS CONTEXTOS DONDE FUNCIONA, PERO ESTE NO).

$X = [\![600]\!]$

en $P(x)$ se define

$A \mathcal{R} B \iff \#(A \triangle B) \leq 2$

a) ¿es REFLEXIVA?

$A \triangle A = \emptyset$ siempre

$\#\emptyset = 0$

$0 \leq 2$

ES REFLEXIVA ✓

¿es SIMÉTRICA?

$A \triangle B = B \triangle A$

$\therefore$

$\#(A \triangle B) = \#(B \triangle A)$

ES SIMÉTRICA ✓

¿es ANTISIMÉTRICA?

CONTRAEJEMPLO

$\{1,2\} \neq \{2,3\}$

$\{1,2\} \mathcal{R} \{2,3\}$

$\#(\{1,2\} \triangle \{2,3\}) = 2 \leq 2$

$\{2,3\} \mathcal{R} \{1,2\}$

$\#(\{2,3\} \triangle \{1,2\}) = 2 \leq 2$

NO ES ANTISIMÉTRICA ✗

¿es TRANSITIVA?

CONTRAEJEMPLO

$\{1,2\} \mathcal{R} \{2,3\}$ $\#(A \triangle B) = 2$

$\{2,3\} \mathcal{R} \{3,4\}$ $\#(B \triangle C) = 2$

pero

$\{1,2\} \not\mathcal{R} \{3,4\}$ $\#(A \triangle C) = 4$

NO ES TRANSITIVA ✗

~~$\#(A \triangle B) \leq 2$ significa que comparten sus elementos exc~~

$\#(A \triangle B)$ es la cantidad de elementos que A y B no comparten,

si $\#(A \triangle B) \leq 2$, entonces hay 3 casos $= 0$, $= 1$, $= 2$

b) si $B = \{n \in X : n \equiv 2023 \ (21)\}$

¿cuántos A en $P(x)$ cumplen $A \mathcal{R} B$?

PARA EMPEZAR CALCULO $\#B$

$2023 = 21 \cdot 96 + 7$

por lo que $B = \{n \in X : n \equiv 7 \ (21)\}$

¿cuántos $n \equiv 7 \ (21)$ hay en X?

$600 = \underbrace{21 \cdot 28}_{\text{acá hay } 28} + \underbrace{12}_{\text{acá hay } 1}$ $\therefore \#B = 29$

CASO $\#(A \triangle B) = 0$

comparten todos sus elementos

caso único $A = B$ (1)

CASO $\#(A \triangle B) = 1$

a) A tiene un elemento de más

b) a A le falta un elemento de B

a) $\binom{571}{1}$ b) $\binom{29}{1}$

CASO $\#(A \triangle B) = 2$

a) A tiene 2 elementos de más

b) A tiene 1 elemento de más y le falta 1 de B

c) a A le faltan 2 elementos de B

a) $\binom{571}{2} = 162735$ b) $\binom{571}{1}\binom{29}{1} = 16559$ c) $\binom{29}{2} = 406$

SUMO TODOS LOS CASOS

$1 + 571 + 29 + 162735 + 16559 + 406 =$

$\boxed{180301 \text{ A en } P(x) \text{ tal que } A \mathcal{R} B}$ ✓

AZUA ARCE, MATEO (42.910.872) 1er PARCIAL

TEMA D

EJERCICIO 2

$(n^4 - 3n^3 - 8n^2 + 12n + 33 : n^2 - 2n - 8)$

POR DIVISIÓN DE POLINOMIOS

¿Y la división?

$n^4 - 3n^3 - 8n^2 + 12n + 33 = (n^2 - 2n - 8)(n^2 - n - 2) + \underline{17}$

$(n^4 - 3n^3 - 8n^2 + 12n + 33 : n^2 - 2n - 8) = \boxed{(n^2 - 2n - 8 : 17)} = d$

$d \mid 17$

$d \in \{1, 17\}$

$d = 17$

SI

$17 \mid n^2 - 2n - 8$

$n^2 - 2n \equiv 8 \ (17)$

HAGO TABLA DE RESTOS

mod 17

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
n^2	0	1	4	9	16	8	2	15	13	13	15	2	8	16	9	4	1
n^2-2n	0	-1	0	3	8	-2	-10	1	-3	-5	-5	14	1	-10	15	8	3

$$\boxed{\begin{array}{l} d = 17 \iff n \equiv 4 \ (17) \ \vee \ n \equiv 15 \ (17) \\ d = 1 \iff n \not\equiv 4 \ (17) \ \wedge \ n \not\equiv 15 \ (17) \end{array}}$$

AZUA ARCE, MATEO (42.910.872) 1er PARCIAL TEMA D

EJERCICIO 3

$a \perp b \quad a, b \in \mathbb{Z}$

TENGO QUE HALLAR TODOS LOS PARES a, b

$$\frac{2a}{b} - \frac{73a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{2a}{b} - \frac{73a^2}{b^2} = \frac{2ab^2 - 73a^2b}{b^3}$$

$b^3 \mid 2ab^2 - 73a^2b \ \wedge \ b^2 \mid b^3 \longrightarrow b^2 \mid 2ab^2 - 73a^2b$

$b^2 \mid 2ab^2$

$\downarrow$

$b^2 \mid 73a^2b$ 73 es primo

para que se cumpla, b^2 debe estar presente en el dividendo ?

como $a \perp b$, podemos concluir que $b = 73$ o $b = 1$

cómo ? ¿por qué?

Si $b = 73$

$73^3 \mid 2a \cdot 73^2 - 73a^2 \cdot 73$

$73^3 \mid 73^2(2a - a^2)$

$73^3 \mid 73^2(a)(2-a)$

otra vez, para que se cumpla,

$73 \mid (a)(2-a)$

~~$73 \mid 2a - a^2$~~

$a \neq 73$, pues $a \perp b$.

$\therefore$

$73 \mid 2 - a$

$a \equiv 2 \ (73)$ ✓

Si $b = 1$

como b ~~está~~ es la única en el divisor, siempre va a dar como resultado un entero

$a \equiv 0 \ (1)$

¿Quiénes cumplen esto?

$$\boxed{\text{los pares } (a,b) \text{ serán de la forma } (a \equiv 0 \ (\text{mod } 1), 1) \ \text{ o } \ (a \equiv 2 \ (\text{mod } 73), 73)}$$

(vale para todos los pares que cumplan con alguna de las dos)

Falta analizar el caso $b < 0$

AZUA ARCE, MATEO (42.910.872)

1er PARCIAL

TEMA D

EJERCICIO 4

$$a_0 = 4 \qquad a_{n+1} = 4\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) - 6n^2 + 13n + 16 \qquad \forall n \geq 0$$

DEBO PROBAR QUE

$$a_n > 5^n + 3n - 4 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

TODO EL PARCIAL ESTÁ MUY BIEN RESUELTO, PERO MUY POCO EXPLICADO. SÉ MÁS EXPLÍCITO EN TUS RAZONAMIENTOS. ¡Y BUEN TRABAJO!

POR INDUCCIÓN COMPLETA

CASO BASE $(n=0)$

$$a_0 > 5^0 + 3(0) - 4$$

$$4 > -3 \quad \checkmark$$

PASO INDUCTIVO

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq m \leq h$$

$$a_m > 5^m + 3m - 4 \longrightarrow a_{h+1} > 5^{h+1} + 3(h+1) - 4$$

$$4\left(\sum_{k=0}^{h} a_k\right) - 6h^2 + 13h + 16 > 5^{h+1} + 3h - 1$$

Basta ver el $\geq$

$$4\left(\sum_{k=0}^{h} a_k\right) - 6h^2 + 13h + 16 \overset{HI}{>} 4\left(\sum_{k=0}^{h} 5^k + 3k - 4\right) - 6h^2 + 13h + 16 \overset{QVQ}{>} 5^{h+1} + 3h - 1$$

$$4\left(\sum_{k=0}^{h} 5^k + \sum_{k=0}^{h} 3k - \sum_{k=0}^{h} 4\right) - 6h^2 + 13h + 16 > 5^{h+1} + 3h - 1$$

COMO EMPIEZA EN 0, ME FALTÓ SUMAR $5^0 = 1$

$$4\left(1 + \frac{1 - 5^{h+1}}{1-5} + 3\frac{(h)(h+1)}{2} - 4(h+1)\right) - 6h^2 + 13h + 16 > 5^{h+1} + 3h - 1$$

El 1 no va, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

$$\cancel{4} - 1 + 5^{h+1} + \cancel{6h^2} + 6h - 16h - 16 - \cancel{6h^2} + 13h + 16 > 5^{h+1} + 3h - 1$$

$$5^{h+1} + 3h + \cancel{3} \;\cancel{>}\; 5^{h+1} + 3h - 1$$

-1 $=$

$$3 > -1 \quad \checkmark$$

$$\boxed{\text{QUEDA PROBADO POR INDUCCIÓN COMPLETA QUE} \quad a_n > 5^n + 3n - 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0}$$