1	2	3	4	CALIF.
B	B/M/B/B	B	B	A

TEMA 1

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA:
TURNO: ☒ Ma-Ju 14-17 hs ☐ Ma-Ju 19-22 hs

HOJAS ENTREGADAS = 6

Probabilidades y Estadística (C)
Segundo Cuatrimestre de 2014 - Primer Parcial
30/09/2014

1. Una biblioteca tiene, entre otros, 5 libros con 100 páginas cada uno. El libro número i ($i = 1, \ldots, 5$) tiene i de sus páginas con errores tipográficos. Se selecciona al azar uno de estos libros y se elige una página, también al azar.

B *a*) Calcular la probabilidad de que la página elegida tenga errores tipográficos.

B *b*) Sabiendo que la página elegida posee errores tipográficos, ¿cuál es la probabilidad de que el libro seleccionado sea el número i?

B *c*) Se calcula que la cantidad total de libros con errores tipográficos en la biblioteca está dada por una variable aleatoria $X \sim N(1500, \sigma^2)$. Hallar $Var(X)$, si se sabe que $P(X > 1750) = 0,003$.

2. Ford compra sistemas de cableados a Lear, y bocinas y filtros de aire a Repuestos Automotrices Tandil. La probabilidad de que una bocina sea defectuosa es del 20 % y la probabilidad de que un filtro de aire sea defectuoso es de 10 %. La empresa Lear atraviesa un conflicto gremial, y en señal de protesta los trabajadores producen en los días de protesta sistemas con probabilidad de defecto de 40 %, mientras que el resto de los días producen los sistemas con la probabilidad de defecto de 10 %. La probabilidad de que en un cierto día realicen una protesta es de 1/2. Cada auto lleva una bocina, un filtro de aire y un sistema de cableado.

B *a*) Calcular la probabilidad de que un auto no tenga ninguna componente defectuosa, y la probabilidad de que tenga por lo menos una defectuosa.

M *b*) Una concesionaria compra regularmente autos Ford. Calcular la probabilidad de que los primeros 5 autos que compra este mes no sean defectuosos, si los sistemas de cableado de los 5 autos fueron producidos el mismo día.

B *c*) La cantidad de autos Ford que compra la concesionaria por mes es una v.a. $\mathcal{P}(10)$. Hallar la probabilidad de que este mes compre exactamente 7 autos. Dado que compró 7 autos, hallar la probabilidad de que exactamente 1 sea defectuoso, si los sistemas de cableado de cada auto fueron elaborados en días distintos.

B *d*) Ford decide intervenir en el conflicto de Lear al recibir el décimo sistema de cableado defectuoso. Calcular la probabilidad de que deba esperar a recibir exactamente 100 sistemas de cableado para intervenir, si los sistemas de cableado de cada auto fueron elaborados en días distintos.

3. El tiempo en años X de vida útil de un servidor sigue una distribución con densidad

$$f_X(x) = \lambda(3 - x) I_{[0,3]}(x),$$

para un cierto $\lambda > 0$.

B *a*) Hallar el valor de λ.

B *b*) Hallar $E(X)$ y la mediana de X.

B *c*) Una empresa tiene dos servidores de este tipo, y la vida útil de cada uno es independiente del otro. Si al transcurrir un año de su puesta en funcionamiento, ambos servidores están funcionando, hallar la probabilidad de que continúen funcionando al finalizar el segundo año.

B *d*) El costo total de mantenimiento Y de un servidor se calcula, en función de su vida útil, como $Y = e^{X+1}$. Calcular la función de densidad f_Y de dicho costo.

4. Una urna contiene 2 bolitas blancas y 2 bolitas negras. Se tira un dado equilibrado de 4 caras con los números del 1 al 4. Luego se extraen (*) de la urna tantas bolitas como indica el dado. Sean X = cantidad de bolitas blancas extraidas e Y = cantidad de bolitas negras extraidas.

(*) SIN REPOSICIÓN

B *a*) Hallar la función de probabilidad conjunta de las variables X e Y.

B *b*) ¿Son independientes las variables X e Y?

B *c*) Hallar $E(X)$.

B *d*) Se repite el experimento dos veces consecutivas, en forma independiente. Sea Z la cantidad total de bolitas blancas extraidas sumando ambos experimentos. Calcular $P(Z = 2)$.

1.

5 libros con 100 pág c/u

El libro i tiene i páginas con errores tipográficos

E = La página elegida tiene errores tipográf

L_i = Se elige al azar el libro i , $i=1,\dots,5$

$$P(L_i) = \frac{1}{5} \qquad i=1,\dots,5$$

a)
$$P(E) \overset{\text{PROB TOTAL}}{=} \sum_{i=1}^{5} P(E \cap L_i) \overset{\text{DEF DE PROB COND}}{=} \sum_{i=1}^{5} P(E|L_i)P(L_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{5} \left(P(E|L_i) * \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{5} * \sum_{i=1}^{5} P(E|L_i)$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} \frac{i}{100} = \frac{1}{500} \sum_{i=1}^{5} i = \frac{1}{\cancel{500}_{100}} * \frac{\cancel{5}^{1} * \cancel{6}^{3}}{\cancel{2}} = \frac{3}{100}$$

b)
$$P(L_i|E) \overset{\text{BAYES}}{=} \frac{P(E|L_i)\,P(L_i)}{P(E)}$$

$$= \frac{\frac{i}{\cancel{100}_{1}} * \frac{1}{5}}{\frac{3}{\cancel{100}_{1}}} = \frac{i}{15}$$

c) $X \sim N(1500, \sigma^2)$

$Var(X) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{VISTO EN CLASE}}}{=} \sigma^2$

$P(X > 1750) = 0.003$

$1 - P(X \leq 1750) = 0.003$

$P(X \leq 1750) = 0.997$

$P\Big(\underbrace{\frac{X - 1500}{\sigma}}_{\sim N(0,1)} \leq \frac{1750 - 1500}{\sigma}\Big) = 0.997$

$\phi\left(\frac{250}{\sigma}\right) = 0.997$

$\frac{250}{\sigma} = 2.75$

$\sigma = \frac{1000}{11}$

$Var(X) = \left(\frac{1000}{11}\right)^2$

2.

H: Hay huelga en Lear

D_F: El filtro de aire está defectuoso

D_B: La bocina está defectuosa

D_C: Los sist de cableado están defectuosos

$P(D_F)=0.1 \quad P(D_B)=0.2$

$P(H)=0.5 \quad P(D_C|H)=0.4 \quad P(D_C|H^c)=0.1$

D_F^c, D_B^c, D_C^c son eventos indep

a) $P(D_F^c \cap D_B^c \cap D_C^c) = P(D_F^c)P(D_B^c)P(D_C^c)$

$= 0.9 * 0.8 * P(D_C^c) = 0.9 * 0.8 * (P(D_C^c|H)P(H)$

PROB TOTAL Y DEF PROB CONDICIONAL

$+ P(D_C^c|H^c)P(H^c)) = 0.9 * 0.8 * (0.6 * 0.5 + 0.9 * 0.5)$

$= \frac{27}{50}$

$P(A)=1-P(A^c)$

$P((D_F^c \cap D_B^c \cap D_C^c)^c) = 1 - P(D_F^c \cap D_B^c \cap D_C^c)$

$= 1 - \frac{27}{50} = \frac{23}{50}$

b) A_i: El auto i no es defectuoso, $i=1,\dots,5$

$$\cancel{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \underset{A_1,\dots,A_5 \text{ son indep}}{=} P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)}$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{5} A_i\right) \underset{A_1,\dots,A_5 \text{ son indep}}{=} \prod_{i=1}^{5} P(A_i) = P(A_1)^5$$

$P(A_i)=P(A_j) \quad \forall i,j,\ i\neq j,\ i,j\in\{1,\dots,5\}$

$$= \left(P(D_F^c)\,P(D_B^c)\,P(D_C^c)\right)^5$$

D_F^c, D_B^c, D_C^c son indep

$$= \left(\frac{27}{50}\right)^5$$

→ Esto estaría bien si los componentes fueran producidos en días independientes. Como fueron producidos el mismo día da lo siguiente. $P\left(\bigcap_{i=1}^{5} A_i \mid H\right)\frac{1}{2} + P\left(\bigcap_{i=1}^{5} A_i \mid H^c\right)\frac{1}{2} =$
$=(0{,}8\cdot 0{,}9\cdot 0{,}6)^5\cdot\frac{1}{2} + (0{,}8\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9)^5\cdot\frac{1}{2}$

c) X: # autos que compra la concesionaria al mes

$$X \sim \mathcal{P}(10)$$

$$P_X(7) = \frac{10^7 e^{-10}}{7!}$$

Y: # autos defectuosos entre los 7 comprados → prueba auto defectuoso

$$Y \sim Bi\left(7, \frac{23}{50}\right)$$

3/6

$P_Y(1) = \binom{7}{1}\left(\frac{23}{50}\right)^1\left(\frac{27}{50}\right)^6 = 0.07984$

d) $P(D_c) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{PROB TOTAL}}}{=} P(D_c|H)P(H) + P(D_c|H^c)P(H^c)$

$= 0.4 * 0.5 + 0.1 * 0.5 = 0.25$

W: # sist de cableado revisados hasta hallar 10 defectuosos

$W \sim BN(10, 0.25)$

$P_W(100) = \binom{99}{9} 0.25^{10}\, 0.75^{90}$

4/6

3.

$$f_X(x) = \lambda(3-x)\, I_{[0,3]}(x)$$

a) DEF DE DENSIDAD DE UN V.A. ABS CONT

$$\int_0^3 \lambda(3-x)\,dx = 1$$

$$\lambda\left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 1$$

$$\lambda\left(9 - \frac{9}{2}\right) = 1$$

$$\frac{9}{2}\lambda = 1$$

$$\lambda = \frac{2}{9}$$

b) $$E(X) = \int_0^3 x\,\frac{2}{9}(3-x)\,dx$$

$$= \frac{2}{9}\left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{2}{9} * \frac{9}{2} = 1$$

Escribo la $F_X(t)$ pero para $t \in (0,3)$. No ~~me~~ es necesario para el ejercicio definir a $F_X(t)$ en todo $\mathbb{R}$

$0 < t < 3$

$$F_X(t) = \int_0^t \frac{2}{9}(3-x)dx = \frac{2}{9}\left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_0^t$$

$$= -\frac{t^2}{9} + \frac{2}{3}t$$

La mediana de X es el $t_{0.5}$ /

$F_X(t_{0.5}) = 0.5$

$$F_X(t_{0.5}) = 0.5$$

$$-\frac{t^2}{9} + \frac{2}{3}t = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{2}{9}t^2 + \frac{4}{3}t - 1 = 0$$

$$\frac{-\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - 4\left(-\frac{2}{9}\right)(-1)}}{2 * \left(-\frac{2}{9}\right)} \quad \begin{array}{l} \rightarrow t_1 = 3 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ \rightarrow t_2 = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{array}$$

Me quedo con t_2 porque $0 < t_2 < 3$

$F_X^{-1}(t_1) = 1$ por ser $t_1^{-1} > 3$

$$t_{0.5} = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

c) D: duración en años de los 2 servidores

$$P(D\geq 2 \mid D\geq 1) \overset{\text{PROB COND}}{=} \frac{P(D\geq 2 \cap D\geq 1)}{P(D\geq 1)}$$

$$= \frac{P(D\geq 2)}{P(D\geq 1)} = \frac{P(X_1\geq 2 \cap X_2\geq 2)}{P(X_1\geq 1 \cap X_2\geq 1)}$$

$$\overset{X_1,X_2 \text{ indep}}{=} \frac{P(X_1\geq 2)P(X_2\geq 2)}{P(X_1\geq 1)P(X_2\geq 1)} \overset{X_1,X_2 \text{ tienen = func de densidad}}{=} \frac{(P(X_1\geq 2))^2}{(P(X_1\geq 1))^2}$$

$$= \left(\frac{\frac{2}{9}\int_2^3 3-x\,dx}{\frac{2}{9}\int_1^3 3-x\,dx}\right)^2 = \left(\frac{\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_2^3}{\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_1^3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{9-\frac{9}{2}-6+\frac{4}{2}}{9-\frac{9}{2}-3+\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

X_i: duración en años del servidor i, $i=1,2$

X_i tiene func de densidad $\frac{2}{9}(3-x)\,I_{[0,3]}(x)$

d) $Y = e^{X+1}$
$\cdot\ y > 0$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^{X+1} \leq y)$

$= P(X+1 \leq \ln(y)) = P(X \leq \ln(y) - 1)$

$= F_X(\ln(y) - 1)$

$F_Y(y) = F_X(\ln(y) - 1)$

derivo respecto a y

$f_Y(y) = f_X(\ln(y) - 1) * \frac{1}{y}$

$f_X(\ln(y) - 1) = \frac{2}{9}(3 - \ln(y) + 1)$

$\Longleftrightarrow 0 \leq \ln(y) - 1 \leq 3$

$1 \leq \ln(y) \leq 4$

$e \leq y \leq e^4$

$f_Y(y) = \frac{1}{y}\frac{2}{9}(-\ln(y) + 4) \, I_{[e, e^4]}(y)$

6/6

4.

a)

Y \ X	0	1	2
0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

$P_{XY}(0,1) = \frac{\binom{2}{1}}{\binom{4}{1}} * \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ $\quad$ $P_{XY}(2,0) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} * \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

$P_{XY}(1,0) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{8}$ $\quad$ $P_{XY}(0,2) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{24}$

ANÁLOGO A (0,1) $\quad$ ANÁLOGO A (2,0)

$P_{XY}(1,1) = \frac{\cancel{2*2}}{\binom{4}{2}} * \frac{1}{\cancel{4}} = \frac{1}{6}$

$P_{XY}(2,1) = \frac{2}{\binom{4}{3}} * \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ $\quad$ $P_{XY}(1,2) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{8}$

ANÁLOGO A (2,1)

$P_{XY}(2,2) = \frac{1}{\binom{4}{4}} * \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

b) $P_{XY}(0,0) = 0 \neq P_X(0)\,P_Y(0) = \frac{1}{6} * \frac{1}{6}$

Luego X, Y no son indep

c) $E(X) = 1 * \frac{5}{12} + 2 * \frac{5}{12} = \frac{5}{4}$

d) ~~Bolitas~~

X_i : # bolitas blancas en el experimento i, $i = 1, 2$

$$Z = 2 \iff X_1 + X_2 = 2 \iff \begin{cases} X_1, X_2 = 1 \\ X_1 = 0, \; X_2 = 2 \\ X_1 = 2, \; X_2 = 0 \end{cases}$$

$$P(Z=2) = \sum_{i=0}^{2} P(X_1 = i \cap X_2 = 2-i)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ X_1, X_2 \text{ indep}}}{=} \sum_{i=0}^{2} \left(P(X_1 = i) P(X_2 = 2-i) \right)$$

$$= P(X_1 = 0) P(X_2 = 2) + P(X_1 = 1) P(X_2 = 1) + P(X_1 = 2) P(X_2 = 0)$$

$$= 2 P(X_1 = 0) P(X_2 = 2) + P(X_1 = 1)^2$$

$$= 2 * \frac{1}{6} * \frac{5}{12} + \left(\frac{5}{12}\right)^2$$

$$= \frac{5}{16}$$

¡Muy bien! (: