RESOLUCIÓN DEL EXAMEN FINAL DEL 21-10-2021

Ejercicio 1: Por definición

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & a \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} = -5a\mathbf{i} + 5a\mathbf{j} + \mathbf{k} = (-5a, 5a, 1).$$

Este vector es paralelo a $(1, -1, 1)$ cuándo es un múltiplo escalar no nulo de $(1, -1, 1)$, y esto solo ocurre cuando $a = -1$.

Respuesta: El vector $\vec{u} \times \vec{v}$ es paralelo a $(1, -1, 1)$ cuándo $a = -1$.

Ejercicio 2: Sea $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ y sea (x, y, z) un punto de S. El gradiente $\nabla F(x, y, z)$, de F en (x, y, z), es perpendicular al plano tangente T, a S en (x, y, z). Por lo tanto, T es perpendicular a la recta L de ecuaciones $x = 1 + 2t$, $y = 3 + 8t$ y $z = 2 - 6t$ si y solo si $\nabla F(x, y, z)$ es paralelo al vector director $(2, 8, -6)$, de L. Un cálculo directo muestra que

$$\nabla F(x, y, z) = (2x, 4y, 6z),$$

y es claro que existe un escalar t no nulo tal que $t(2, 8, -6) = (2x, 4y, 6z)$ si y solo si $y = 2x$ y $z = -x$. Además, debe ser

$$12x^2 = (1 + 8 + 3)x^2 = x^2 + 2(2x)^2 + 3(-x)^2 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 75.$$

Por lo tanto $x^2 = \frac{75}{12} = \frac{25}{4}$ y $x = \pm\frac{5}{2}$.

Respuesta: El plano tangente a S es perpendicular a la recta del enunciado en los puntos $\pm\left(\frac{5}{2}, 5, -\frac{5}{2}\right)$.

Ejercicio 3: Aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange. Si la restricción de f a la esfera $S = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{7}{2}$ tiene un extremo en (x, y, z), entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} 2 &= 2\lambda x, \\ -3 &= 2\lambda y, \\ 1 &= 2\lambda z, \\ \frac{7}{2} &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Por la primera ecuación, $\lambda \neq 0$. Por lo tanto

$$2\lambda x = 2 = 4\lambda z \Rightarrow x = 2z \quad \text{y} \quad 2\lambda y = -3 = -6\lambda z \Rightarrow y = -3z.$$

Reemplazando x e y por estos valores en la cuarta ecuación, obtenemos

$$14z^2 = (4 + 9 + 1)z^2 = (2z)^2 + (-3z)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{7}{2}.$$

Así, $z^2 = \frac{1}{4}$ y $z = \pm\frac{1}{2}$. Esto prueba que los único puntos en los que f puede alcanzar un extremo sobre S son

$$\left(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(-1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Pero como S es un conjunto compacto, por el Teorema de Bolzano Weierstrass f alcanza su máximo y mínimo absoluto sobre S. Como

$$f\left(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 + 3\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 7 \quad \text{y} \quad f\left(-1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -2 - 3\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -7,$$

el máximo valor de f sobre S es 7.

Respuesta: El máximo valor de la función $f(x, y, z) = 2x - 3y + z$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{7}{2}$ es 7 y se alcanza en el punto $\left(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Ejercicio 4: Evaluaremos la integral en coordenadas cilíndricas. Dicho de otro modo, usaremos el cambio de variables $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$ y $z = z$. Con este cambio de variables el conjunto R se escribe como $\{(r,\theta,z) : 0 \le r \le \sqrt{2},\ 0 \le \theta \le 2\pi \text{ y } -2 \le z \le 3\}$, y

$$\begin{aligned}
\iiint_R x^2+y^2+z^2\,dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{-2}^{3}(r^2+z^2)r\ dzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^3z\Big|_{-2}^{3} + r\frac{z^3}{3}\Big|_{-2}^{3}\ drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} 5r^3+9r+\frac{8}{3}r\ drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} 5r^3+\frac{35}{3}r\ drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 5\frac{r^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{2}} + \frac{35}{3}\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2}}\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 5+\frac{35}{3}\ d\theta \\
&= 2\pi\frac{50}{3} \\
&= \frac{100}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Respuesta: $\iiint_R x^2+y^2+z^2\ dV = \frac{100}{3}\pi$.