PROMOCIONA: 9

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Segundo Parcial (26/11/2022) - 2do. cuatrimetre 2022

TEMA 2 9

1 (2,5 pts.)	2 (2,5 pts.)	3 (2,5 pts.)	4 (2,5 pts.)	Nota
B/B.	B/B-	B/B-	B	9

Apellido: LISAZO Nro. de libreta: 1783/21 Nro de práctica: 2

Nombre: TOMAS Carrera: LIC. EN CIENCIAS DE LA COMPUTACION

1. Sea $f(x,y) = \sin(xy) + \cos(xy)$.

   (a) Hallar el polinomio de Taylor de segundo orden de $f(x,y)$ en el punto $(0,2)$.

   (b) Calcular el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{2\sin(xy) + 2\cos(xy) - 2 - 2x(y-2) - 4x + 8x^2 + 4(y-2)^2}{x^2 + (y-2)^2}.$$

2. Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6xy - (a-1)y^3$.

   (a) Hallar, si existe, $a \in \mathbb{R}$ de modo que $(1, \frac{1}{3})$ sea un punto crítico y decidir si es máximo local, mínimo local o punto silla.

   (b) Para $a = 1$ hallar los extremos absolutos de f restringidos al conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9,\ x \geq 0\}.$$

3. (a) Analizar la convergencia de la siguiente integral impropia

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2 |\cos x|}{(x^2+1)x^3}\, dx.$$

   (b) Dibujar el dominio de integración y calcular

$$\int_{-4}^{0} \int_{-\frac{y}{4}}^{1} \frac{e^{x^2}}{4}\, dx dy.$$

4. Sea W el sólido definido por $x^2 + y^2 \leq z^2$, $x^2 + y^2 + (z-4)^2 \leq 16$, $z \geq 0$.

   Calcular

$$\iiint_W z - 4\, dV.$$

Escribir todos los razonamientos que justifican las respuestas.

TOMAS
LISAZO

Hoja 1
W: 1783/21

① ⓐ $f(x,y) = sen(xy) + cos(xy)$, $(0,2)$

Para construir el polinomio de Taylor de orden 2 de f, necesitamos unos cuantos datos, sobretodo derivadas.

Llamemos $P_2(x,y)$ al polinomio, este esta dado por

$$P_2(x,y) = f(0,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,2)(x) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,2)(y-2) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,2)x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,2)(y-2)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,2)(y-2)x$$

Consigamos estos datos.

$f(0,2) = 0 + 1 = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = cos(xy)y - sen(xy)y\Big|_{(0,2)} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,2) = cos(xy)x - sen(xy)x\Big|_{(0,2)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,2) = -sen(xy)y^2 - cos(xy)y^2\Big|_{(0,2)} = -4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,2) = -sen(xy)x^2 - cos(xy)x^2\Big|_{(0,2)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,2) = cos(xy) + yx(-sen(xy)) - (sen(xy) + yx(cos(xy)))\Big|_{(0,2)} = 1$$

→ Finalmente, tendriamos que el polinomio de Taylor de orden 2 de f es $P_2(x,y) = 1 + 2x - 2x^2 + x(y-2)$, centrado en $(0,2)$.

ⓑ Antes de arrancar a resolver el limite, voy a reescribirlo un poco por comodidad.

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{2sen(xy) + 2cos(xy) - 2 - 2x(y-2) - 4x + 8x^2 + 4(y-2)^2}{x^2 + (y-2)^2} = *$$

NOTA

$$* = \lim_{(x,y)\to(0,2)} 2\,\frac{\overbrace{\text{sen}(xy)+\cos(xy)}^{f(x,y)} - \overbrace{1 - x(y-2) - 2x + 2x^2}^{P_2(x,y)} + 2x^2 + 2(y-2)^2}{x^2+(y-2)^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,2)} 2\,\frac{f(x,y) - P_2(x,y) + 2x^2 + 2(y-2)^2}{\underbrace{x^2+(y-2)^2}_{\|(x,y)-(0,2)\|^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,2)} 2\,\frac{f(x,y) - P_2(x,y) + 2(x^2+(y-2)^2)}{\|(x,y)-(0,2)\|^2}$$

Ahora empieza lo bueno. Sabemos que $f(x,y) = P_2(x,y) + R_2(x,y)$, con $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{R_2(x,y)}{\|(x,y)-(0,2)\|^2} = 0$ por la definición del resto. Reemplazamos f usando esto.

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,2)} 2\,\frac{\overbrace{f(x,y)}^{P_2(x,y)+R_2(x,y)} - P_2(x,y) + 2(x^2+(y-2)^2)}{\|(x,y)-(0,2)\|^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,2)} 2\,\frac{P_2(x,y) + R_2(x,y) - P_2(x,y) + 2(x^2+(y-2)^2)}{\|(x,y)-(0,2)\|^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,2)} 2\,\frac{R_2(x,y) + 2(x^2+(y-2)^2)}{\|(x,y)-(0,2)\|^2} =$$

Por álgebra de límites

$$= \lim_{(x,y)\to(0,2)} 2\,\frac{R_2(x,y)}{\|(x,y)-(0,2)\|^2} + \lim_{(x,y)\to(0,2)} 2\,\frac{\overbrace{2(x^2+(y-2)^2)}^{\|(x,y)-(0,2)\|^2}}{\|(x,y)-(0,2)\|^2} =$$

$$= 2\underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{R_2(x,y)}{\|(x,y)-(0,2)\|^2}}_{} + \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{4\|(x,y)-(0,2)\|^2}{\|(x,y)-(0,2)\|^2}$$

Tiende a 0 por definición de resto

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{4\|(x,y)-(0,2)\|^2}{\|(x,y)-(0,2)\|^2} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} 4 = \underline{\underline{4}}$$

$\Rightarrow$ Finalmente, el límite existe y vale 4.

TOMAS
LISAZO

Hoja 2
LU: 1783/21

2 ⓐ $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6xy - (a-1)y^3, \quad (1, \frac{1}{3})$

Si queremos $(1,\frac{1}{3})$ sea punto crítico, las derivadas de f evaluadas en ese punto deberán anularse.

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,\frac{1}{3}) = 0 \Longleftrightarrow 2x - 6y \Big|_{(1,\frac{1}{3})} = 0 \Longleftrightarrow 2 \cdot 1 - \frac{6}{3} = 0 \Longleftrightarrow 0 = 0 \longleftarrow$ ¡Bien!

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,\frac{1}{3}) = 0 \Longleftrightarrow 2y - 6x - (a-1)3y^2 \Big|_{(1,\frac{1}{3})} = 0 \Longleftrightarrow \frac{2}{3} - 6 - (a-1)\frac{3}{9} = 0$

$\Rightarrow \frac{2}{3} - 6 - (a-1)\frac{3}{9} = 0 \Longleftrightarrow \frac{2}{3} - (a-1)\frac{1}{3} = 6 \Longleftrightarrow -\frac{a}{3} + \frac{1}{3} = \frac{16}{3} \Longleftrightarrow -a + 1 = 16$

$\Rightarrow -a + 1 = 16 \Longleftrightarrow a = -15$

$\Rightarrow$ Para que f tenga un punto crítico en $(1,\frac{1}{3})$, a debe ser igual a -15, es decir $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6xy + 16y^3$

Analicemos si es máximo o mínimo, o si es un extremo siquiera. Para eso vamos a usar el criterio de la segunda derivada.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,\frac{1}{3}) = 2 \Big|_{(1,\frac{1}{3})} = 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,\frac{1}{3}) = 2 + 96y \Big|_{(1,\frac{1}{3})} = 2 + 32 = 34$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,\frac{1}{3}) = -6 \Big|_{(1,\frac{1}{3})} = -6$

$$D_f(1,\tfrac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 34 \end{pmatrix}$$

Calculemos el determinante de $D_f(1,\frac{1}{3})$ para decidir si es extremo.

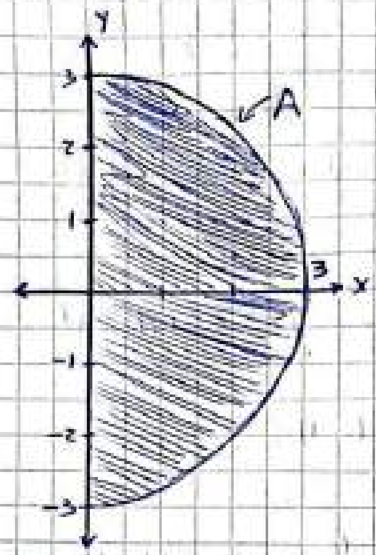
$\det D_f(1,\frac{1}{3}) = 2 \cdot 34 - (-6)(-6) = 32$

Como $\det D_f(1,\frac{1}{3}) > 0 \rightarrow$ ¡$(1,\frac{1}{3})$ es un extremo local!

$\rightarrow$ Finalmente, como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,\frac{1}{3}) > 0 \Longrightarrow (1,\frac{1}{3})$ es un mínimo local de f.

NOTA

⑥ $f(x,y) = x^2+y^2-6xy$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 9,\ x \geq 0\}$



→ Bien, arranquemos. Podemos ver que A es una region compacta, lo cual nos indica que debe haber maximos y minimos absolutos por el lema de Weiestrass (seguro lo escribi mal).

Tambien, podemos, antes de calcular nada, ~~poder~~ separarnos los vertices como candidatos a extremos. Asi que ya tenemos dos: $(0,3)$ y $(0,-3)$.

→ Analicemos primero los puntos criticos de f y veamos si estan dentro de f.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x-6y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y-6x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 2x-6y=0 \\ 2y-6x=0 \end{cases} \longleftarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

A ojo veo claramente que $(0,0)$ es solucion, ~~pero~~ asi que ahora voy a suponer $x \neq 0$ y $y \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 2x-6y=0 \Leftrightarrow 2xy-6y^2=0 \\ \Rightarrow 2y-6x=0 \Leftrightarrow 2xy-6x^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -6y^2+6x^2 \Leftrightarrow 6x^2=6y^2 \Leftrightarrow x^2=y^2$$

$$\Rightarrow x^2=y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$$

Veamos cada caso por separado.

Si $x=-y$

$$\Rightarrow 2x-6y=0 \Leftrightarrow -2y-6y=0 \Leftrightarrow -8y=0 \Leftrightarrow y=0 \rightarrow \text{¡Absurdo!}$$

Si $x=y$

$$\Rightarrow 2x-6y=0 \Leftrightarrow 2x-6x=0 \Leftrightarrow -4x=0 \Leftrightarrow x=0 \rightarrow \text{¡Absurdo!}$$

NOTA

TOMAS LISAZO

Hoja 3

LU: 1783/21

→ No importa lo que hagamos, el unico punto critico de f es (0,0).

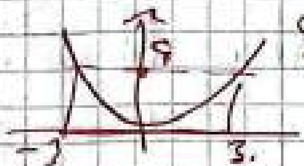
no está en el interior!

Ahora, analicemos los bordes.

→ La figura A esta compuesta por 2 bordes: una recta y una curva. La recta esta definida por $x=0$, $-3 \leq y \leq 3$; y la curva por $x^2+y^2=9$, con $0 \leq x \leq 3$.

Empecemos por la recta que se ve mas facil.

Con $x=0$, $-3 \leq y \leq 3$



$f(x,y) = x^2+y^2-6xy \Rightarrow g(y) = y^2$

mín en $y = 0$

max en $y = \pm 3$

$g'(y) = 2y \Rightarrow 2y = 0 \iff y = 0$

En la recta, el unico punto critico hallado es el origen, que ya lo conocidmos.

Pasemos a la curva. Como despejar una variable se ve dificil, voy a usar multiplicadores de Lagrange para buscar puntos criticos.

Planteamos $g(x,y) = x^2+y^2$. Entonces,

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-6y = \lambda 2x \\ 2y-6x = \lambda 2y \\ x^2+y^2 = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2x-6y = \lambda 2x \iff x-3y = \lambda x$

Voy a separar en casos.

Si $x=0$

$\Rightarrow 2x-6y = \lambda 2x \iff 6y = 0 \iff y=0$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 3 \iff 0 = 3 \leftarrow$ Absurdo

Si $x \neq 0$

$\Rightarrow 2x-6y = 2\lambda x \iff x-3y = \lambda x \iff 1-3y\frac{1}{x} = \lambda$

$\lambda = 1 - 3\, y/x$

NOTA

$\Rightarrow 2y-6x=\lambda 2y \Longleftrightarrow y-3x=\lambda y \Longleftrightarrow y-3x=\left(1-3\frac{1}{xy}\right)y \Longleftrightarrow \overset{y}{\cancel{y}}-3x=y-3\frac{y^2}{x}$

$\Rightarrow y-3x=y-3\frac{y^2}{x} \Longleftrightarrow -3x^2=-3\frac{y^2}{x} \Longleftrightarrow x^2=y^2$

$\Rightarrow x^2+y^2=\overset{9}{\cancel{3}} \Longleftrightarrow 2x^2=3 \Longleftrightarrow x^2=\frac{3}{2} \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow x=\sqrt{\frac{3}{2}} \longrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ $\quad \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2=3\neq 9$!

$\Rightarrow$ Entonces, $\cancel{\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}$ son candidatos a extremos en el borde curvo.

$\Rightarrow$ Ahora tenemos una lista de candidatos y sabemos que A es compacto, por lo que alguno de esos candidatos va a ser maximo y otro minimo. Solo queda evaluar f en cada uno.

Candidatos

$(0,0) \Rightarrow f(0,0)=0$

$(0,3) \Rightarrow f(0,3)=-9$

$(0,-3) \Rightarrow f(0,-3)=27 \longleftarrow$ Maximo absoluto

$\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \Rightarrow f\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=-\frac{21}{2} \longleftarrow$ Minimo absoluto

$\left(\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \Rightarrow f\left(\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{33}{2}$

$\Rightarrow$ Finalmente, f restringida en A alcanza un minimo absoluto en $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ y un maximo absoluto en $(0,-3)$.

③ ⓐ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2|\cos(x)|}{(x^2+1)x^3}\,dx$

Para decidir que la integral converge, necesito encontrar una funcion mayor que si converja. Asi que, acotemos.

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{x^2|\cos(x)|}{(x^2+1)x^3}\,dx = \int_1^\infty \frac{x^2|\cos(x)|}{x^5+x^3}\,dx \underset{\cos(x)\leq 1}{\leq} \int_1^\infty \frac{x^2}{(x^5+x^3)}\,dx = \int_1^\infty \frac{x^2}{x^3}\,\frac{1}{(x^2+1)}\,dx$$

NOTA

TOMAS LISAZO

Hoja 4

LU: 1783/21

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{x^2}{x^3} \frac{1}{(x^2+1)} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)x} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3+x} dx \overset{CA}{\leq} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx \longleftarrow$$ ¡Esto converge a $\frac{1}{2}$!

CA

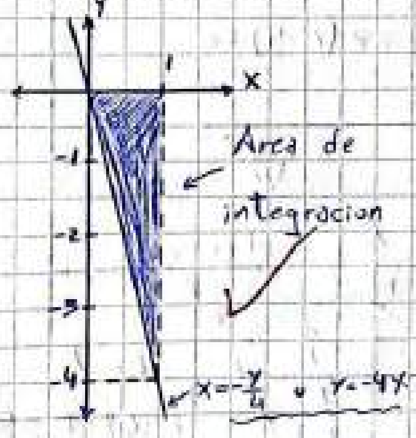
$x^3+x \geq x^3 \Longleftrightarrow \frac{1}{x^3} \geq \frac{1}{x^3+x}$

$x>0$, ya que $\int_1^{\infty}$ los limites de integracion son positivos

$\Rightarrow$ Finalmente, la integral impropia dada si converge. ✓

ⓑ $$\int_{-4}^{0} \int_{-\frac{y}{4}}^{1} \frac{e^{x^2}}{4} dx\, dy$$

Primero grafiquemos el area de integracion



$\Rightarrow$ Veo que arrancar la integral como esta va a ser un poco complicado, asi que cambio el orden de la integral. Es asi, ahora, mi area de integracion se escribe como

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq -4x\}$

De ese modo,

$$\Rightarrow \int_{-4}^{0} \int_{-\frac{y}{4}}^{1} \frac{e^{x^2}}{4} dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{-4x} \frac{e^{x^2}}{4} dy\, dx \longleftarrow$$ Esto se ve mas lindo

A resolver,

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^{-4x} \frac{e^{x^2}}{4} dy\, dx = \int_0^1 \left[\frac{e^{x^2}}{4} y\right]\Big|_0^{-4x} dx = \int_0^1 -e^{x^2} x\, dx = -\int_0^1 e^{x^2} x\, dx$$

Llamo $u = x^2 \rightarrow \frac{1}{2} du = x\, dx$

$$\Rightarrow -\int_0^1 e^{x^2} x\, dx = -\int_0^1 e^u du = -[e^u]\Big|_0^1 = -[e^{x^2}]\Big|_0^1 = -e+1 \Rightarrow 1-e$$ es <0

pero $\frac{e^{x^2}}{5} > 0$!

NOTA

$\Rightarrow$ Finalmente, el resultado de la integral es $1+e$.

④ $\iiint_W z-4\,dV$.

Analicemos las partes de W para poder graficarlo.

$x^2+y^2 \leq z^2 \longleftarrow$ Un cono y su "relleno"

$x^2+y^2+(z-4)^2 \leq 16 \longleftarrow$ Esfera centrada en $(0,0,4)$ de radio 4, y su relleno

$z \geq 0 \longleftarrow$ Valores positivos de z.

Busquemos la intersección entre el cono y la esfera.

$\Rightarrow x^2+y^2=z^2$

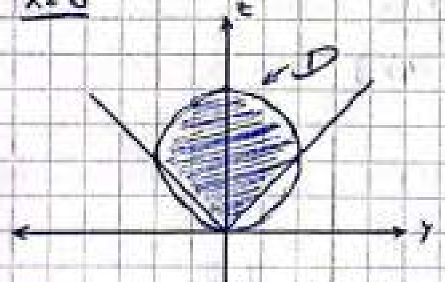
$\Rightarrow x^2+y^2+(z-4)^2=16 \longleftrightarrow z^2+(z^2-4)^2=16 \longleftrightarrow 2z^2-8z+16=16$

$\Rightarrow 2z^2-8z+16=16 \longleftrightarrow z^2-4z+8=8 \longleftrightarrow z^2-4z=0 \longleftrightarrow z(z-4)=0$

$\Rightarrow$ Se tocan en $z=0$, $z=4$

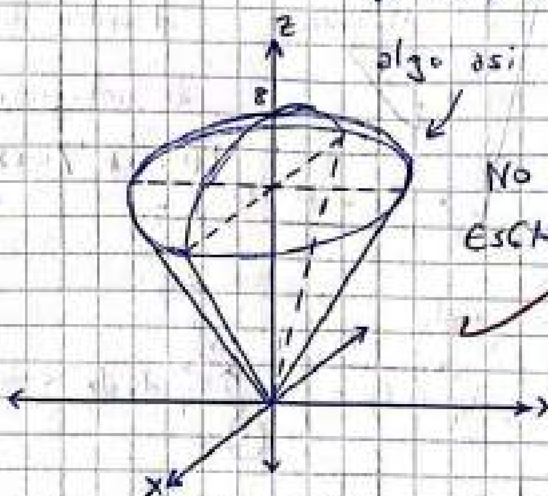
Voy a hacer unas trazas

<u>x=0</u>



$\Rightarrow$

W se vería algo así



NO A ESCALA

$\Rightarrow$ Ahora que sabemos bien como se comporta W, podemos resolver la integral.

$\Rightarrow$ Debido a la simetría y figura casi esférica de W, estoy muy seguro de que me va a convenir usar coordenadas esféricas.

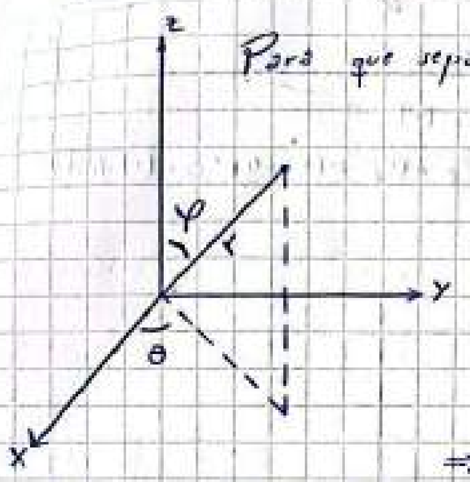
$\Rightarrow$ Busquemos las equivalencias.

NOTA

TOMAS LISAZO

Hoja 5

LU 1783/21



Para que sepan a que angulos me refiero

→ Como vemos en el grafico de W, la figura es totalmente simetrica respecto del eje z. Es decir, que $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = r\cos(\theta)\,sen(\varphi) \\ y = r\,sen(\theta)\,sen(\varphi) \\ z = r\cos(\varphi) \end{cases} \qquad r^2 = x^2+y^2+z^2$$

→ Ahora, los complicados. Empecemos por φ.

La interseccion del cono y la circunferencia se daba en $z=0$ y $z=4$

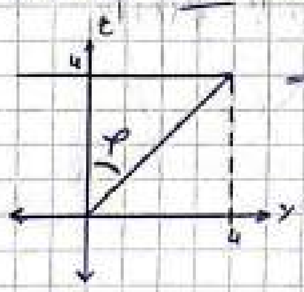
Usemos $z=4$.

$x^2+y^2+z^2-8z \leq 0 \Leftrightarrow r^2 \leq 8r\cos\varphi$

$\Leftrightarrow \boxed{r \leq 8\cos\varphi}$

$\Rightarrow x^2+y^2+(z-4)^2 = 16 \Leftrightarrow \cancel{x^2+y^2=16} \longleftrightarrow$ En $z=4$ hay une circunferencia de radio 4.

Veamos $x=0 \Rightarrow -4 \leq y \leq 4$



→ Grafique solo el lado positivo debido a la simetria en z

→ Queremos el angulo del vector $(4,4)$.

→ Como $z=y \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

→ El angulo φ va de 0 a $\frac{\pi}{4}$

→ Ahora, busquemos r.

$\Rightarrow x^2+y^2+(z-4)^2 \leq 16 \longrightarrow x^2+y^2+z^2-8z+16 \leq 16 \longrightarrow r^2-8r\cos(\varphi) \leq 0$

$\Rightarrow r^2-8r\cos(\varphi) \leq 0 \longrightarrow r^2 \leq 8r\cos(\varphi) \longrightarrow r \leq 8\cos(\varphi)$

Y listo, porque $0 \leq r \leq 8\cos(\varphi)$

→ Ahora que tenemos los limites de la figura en polares, podemos armar la integral y resolverla.

NOTA

$$\Rightarrow \iiint_W z-4\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{8\cos(\varphi)} (r\cos(\varphi)-4)\underbrace{r^2\operatorname{sen}(\varphi)}_{\text{Jacoviano}}\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{8\cos(\varphi)}(r\cos(\varphi)-4)r^2\operatorname{sen}(\varphi)\,dr\,d\varphi\,d\theta = \underbrace{\int_0^{2\pi}d\theta}_{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{8\cos(\varphi)} r^3\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\varphi)-4r^2\operatorname{sen}(\varphi)\,dr\,d\varphi$$

$$\Rightarrow 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{8\cos(\varphi)} r^3\cos(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)-4r^2\operatorname{sen}(\varphi)\,dr\,d\varphi$$

Vamos a ser ordenados

$$\Rightarrow \int_0^{8\operatorname{sen}(\varphi)} r^3\cos(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)-4r^2\operatorname{sen}(\varphi)\,dr = \left[\frac{r^4}{4}\cos(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)-\frac{4}{3}r^3\operatorname{sen}(\varphi)\right]\Bigg|_0^{8\cos(\varphi)}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{r^4}{4}\cos(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)-\frac{4}{3}r^3\operatorname{sen}(\varphi)\right]\Bigg|_0^{8\cos(\varphi)} = \underbrace{\frac{8^3\cos(\varphi)^3}{4}\cos(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)-\frac{4}{3}8^3\operatorname{sen}^3(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)}$$

$$128\cos^4(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)-\frac{2048}{3}\operatorname{sen}^4(\varphi)$$

$$128\left(\cos^4(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)-\frac{16}{3}\operatorname{sen}^4(\varphi)\right)$$

$$\Rightarrow 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{8\cos(\varphi)} r^3\cos(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)-4r^2\operatorname{sen}(\varphi)\,dr\,d\theta = \underbrace{2\pi\,128}_{256\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)-\frac{16}{3}\operatorname{sen}^4(\varphi)\,d\varphi$$

$$\Rightarrow 256\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)-\frac{16}{3}\operatorname{sen}^4(\varphi)\,d\varphi$$

A ver...

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)-\frac{16}{3}\operatorname{sen}^4(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)\overset{d\varphi}{\downarrow}-\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{sen}^4(\varphi)\,d\varphi$$

Y ahora veamos cada uno.

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)\,d\varphi = \left[\frac{-\cos^5(\varphi)}{5}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5}{5} = -\frac{2^{5/2}}{160}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{sen}^4(\varphi)\,d\varphi =$$

NOTA