(6)

8

9(m...

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)
EXAMEN FINAL
(21/07/06)

NOMBRE Y APELLIDO: MATÍAS LÓPEZ Y ROSENFELD
N° DE LIBRETA: 437/03 N° DE HOJAS ENTREGADAS: 4
e-mail: matiaslopez@gmail.com

EL EXAMEN FINAL SE APRUEBA CON 50 PUNTOS

ENUNCIE LAS PROPIEDADES QUE UTILIZA

---

1. (**25 puntos**) Sean A y B dos sucesos cualesquiera de un espacio muestral S. 19

   (a) Definir la independencia entre A y B. ✓

   (b) Probar que si A y B son independientes, entonces A también es independiente de B^c (B complemento). ¿ Son A^c y B^c independientes? Justificar detalladamente. ✓

   (c) Probar que si A tiene probabilidad nula, entonces es independiente de todo evento B. mal.

   ~~evento B.~~

2. (**25 puntos**) Sean X una variable aleatoria con distribución $\Gamma(\alpha, \lambda)$:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} I_{(x>0)} .$$

   (a) Defina función generadora de momentos para una variable aleatoria y demuestre que la función generadora de momentos de X, definida en el item anterior, está dada por 25.

$$M_X(t) = \left[\frac{\lambda}{\lambda - t}\right]^\alpha .$$ ✓

   (b) Sean $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a. i.i.d. $Y_i \sim E(\lambda)$. Deducir la distribución de $\sum_{i=1}^n Y_i$. Justificar detalladamente. ✓

   (c) Sean $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a. i.i.d. $Y_i \sim E(\lambda)$.Demostrar que la distribución del $\min_{1\leq i\leq n} Y_i$ también es exponencial. ¿ De qué parámetro? ✓

3. (**25 puntos**) Supongamos que $X_1, \ldots, X_n$ son v.a. independientes con distribución $N(0, \sigma^2)$.

   (a) Hallar $\hat{\sigma}_n^2$, el estimador de momentos de σ^2. ✓ 25.

   (b) Demostrar que $\hat{\sigma}_n^2$ es un estimador insesgado y consistente de σ^2. ✓

   (c) ¿ Es $\hat{\sigma}_n$ un estimador consitente de σ? Justificar detalladamente. ✓

4. (**25 puntos**) Supongamos $X_1, \ldots, X_n$ son v.a. independientes con distribución $P(\lambda)$ que miden el número de señales que emite una fuente en n períodos de de un minuto y no solapados. Asimismo, asumamos que el tamaño muestral, n, es tan grande como se desee.

(a) Deducir un intervalo de confianza de nivel aproximado 0.90 para λ basándose en la muestra dada.

(b) Si para una muestra del 100 períodos de longitud igual a un minuto se observó un total de 96 señales emitidas, calcular un intervalo de confianza de nivel aproximado 0.90 para λ. 15

(c) Supongamos que antes de tomar la muestra un ingeniero sostiene que el número medio de señales emitidas por la fuente en un período de un minuto es igual a 1. En base a la muestra utilizada en b) y al intervalo de confianza hallado, ¿tiene el ingeniero razón? ¿Qué decisión tomaríamos? ¿Con qué nivel tomaríamos esta decisión? Justificar las respuestas.

$\mu_0 = 0$ $\qquad$ $\mu_1 \geqq 0$

$Z_{1-0,75} = V$

z_α

$P(X \leq V) = \cancel{1}\,0,75$

Lopez Rosenfeld, Matías
437/03

A y B sucesos de S

A y B son independientes sii $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ✓

Si A y B son independientes entonces A y B^c también lo son.

Demo: Voy a usar que $A = A \cap S$ y que $S = B \cup B^c$ y que esta unión es disjunta.
Juntando estas 2 cosas tengo que $A = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \underset{\text{disjunta}}{\cup} (A \cap B^c)$

Si $C \cap D = \emptyset \Rightarrow P(C \cup D) = P(C) + P(D) - \overbrace{P(\underbrace{C \cap D}_{\emptyset})}^{0} = P(C) + P(D)$

Entonces $P(A) = P(A \cap S) = P(A \cap (B \cup B^c)) = P((A \cap B) \underset{\text{disjunta}}{\cup} (A \cap B^c)) = \underbrace{P(A \cap B)}_{P(A).P(B) \text{ porque } A \text{ y } B \text{ son indep}} + P(A \cap B^c)$

$P(A) = P(A) \cdot P(B) + P(A \cap B^c)$

$P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B^c)$

$P(A) \underbrace{(1 - P(B))}_{P(B^c)} = P(A \cap B^c)$

$P(A) \cdot P(B^c) = P(A \cap B^c)$ ✓ entonces A y B^c también son independientes

Para probar que A^c y B^c son independientes ~~xxxxx~~ llamo $C = B^c$
Por lo anterior sé que A y B^c son independientes, es decir A y C son indep.

Si ahora quiero ver C y A^c, es de nuevo como el caso inicial de 2 independientes y que el complemento de uno es independiente de la otra. Entonces C y A^c son indep, es decir B^c y A^c son independientes ✓

→

si $P(A) = 0$. y $P(B) = P(B \cap S) \Rightarrow$ ~~???~~ B y S son independientes

$\hookrightarrow$ espacio muestral

$1 - P(A) = 1$

$\Downarrow$

$\bar{S} = A^c$

$S^c = A$

como B y S son independientes.

y por lo probado anteriormente

B y S^c son también independientes

$\Rightarrow$ B y A son independientes para cualquier evento B.

~~$P(B) = P(B \cap S)$~~

$P(B)\,P(S) = P(B \cap S)$

$P(B) \cdot 1 = P(B \cap S) = P(B)$

Cuidado: $P(A) = 0$ no implica $A = S^c = \phi$.

LÓPEZ Y ROSENFELD, MATÍAS
437/03

$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$

La función generadora de momentos de una V.A. está dada por

$$M_X(t) = E(e^{tX}) \checkmark$$

En este caso (X).

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x) \, dx = \int_0^{+\infty} e^{tx} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx.$$

$$= \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha}}_{\text{de}} \cdot \underbrace{\frac{(\lambda-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x}}_{\text{si la densidad de una } \Gamma(\alpha, \lambda-t)} dx = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{(\lambda-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x} dx}_{\text{esto integra 1.}}$$

$$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha \cdot 1 = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha \checkmark$$

$Y_1 \dots Y_n$ v.a. iid. $Y_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$ como $\mathcal{E}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda) \Rightarrow M_Y(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^1$

$\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim ?$

Voy a usar $M_{\sum_{i=1}^n Y_i}(t) = E\left(e^{t\sum Y_i}\right) = E\left(e^{tY_1} \cdot e^{tY_2} \dots e^{tY_n}\right) = \overbrace{E\left(e^{tY_1}\right)}^{M_{Y_1}(t)} \dots E\left(e^{tY_n}\right) =$

como son independientes puedo separarlos
$E(X.Y) = E(X).E(Y)$
indep

como son iid todas tienen la misma generadora de momento

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right) \dots \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$$ que es la generadora de momentos de una $\Gamma(n, \lambda)$

$M_1(t) \quad M_2(t) \quad M_n(t)$

$Y_1 \ldots Y_n$ v.a. [illegible]

$$T = \min_{1 \leq i \leq n} (Y_i)$$

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(\min_{1\leq i \leq n} (Y_i) \leq t) = 1 - P(\min_{1 \leq i \leq n}(Y_i) \geq t)$$

que el mínimo de Y_i sea ~~menor~~ mayor que t es lo mismo ~~que~~ que todos los Y_i son mayores que t

$$= 1 - P(Y_1 \geq t, Y_2 \geq t, \ldots Y_n \geq t)$$

por independencia

$$= 1 - P(Y_1 \geq t) \cdot P(Y_2 \geq t) \cdot \ldots \cdot P(Y_n \geq t)$$

$$= 1 - (1 - P(Y_1 \leq t)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(Y_n \leq t))$$

$$= 1 - (\cancel{1-1} + e^{-\lambda t}) \cdot \ldots \cdot (1 - 1 + e^{-\lambda t}) = 1 - (e^{-\lambda t})^n$$

$$F_Y(y) = \int_0^y \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^y = -e^{-\lambda y} + 1 = 1 - e^{-\lambda y}.$$

$$F_T(t) = 1 - (e^{-\lambda t})^n$$

derivo con respecto a t

$$f_T(t) = -(e^{-\lambda t})^{n-1} \cdot n \cdot e^{-\lambda t} \cdot (-\lambda) = (\lambda n) \cdot (e^{-\lambda t})^{n-1+1} = (\lambda n)\, e^{-(\lambda n) t} \sim \mathcal{E}(n\lambda).$$

$X_1 \dots X_n$ iid $X_1 \sim N(0, \sigma^2)$

$E(X) = 0$

$E(X^2) = \sigma^2 = V(X) + E^2(X) = \sigma^2 + 0^2 = \sigma^2$

Para estimar el 2do momento uso

$$\frac{\sum (X_i)^2}{n} = \hat{\sigma}_n^2 \checkmark$$

Para que $\hat{\sigma}_n^2$ sea insesgado tengo que ver $E(\hat{\sigma}_n^2) = \sigma^2$.

$$E(\hat{\sigma}_n^2) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}\right) = \frac{E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n E(X_i^2)}{n} = \frac{n \cdot \sigma^2}{n} = \sigma^2 \checkmark$$

como la suma es finita puedo cambiar la E() por la Σ

como son iid $E(X_i^2) = E(X_1^2) = \sigma^2$

Como $\frac{\sum g(X_i)}{n} \xrightarrow{P} E(g(X_1))$.

$g(X_1)$ continua → no hace falta!!

$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{\sum X^2}{n} \xrightarrow{P} E(X^2) = \sigma^2$ entonces es consistente. ✓

como $\hat{\sigma}_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$

$\sqrt{\hat{\sigma}_n^2} \xrightarrow{P} \sqrt{\sigma^2}$

$\hat{\sigma}_n \xrightarrow{P} \sigma$

$\sqrt{x}$ es continua $\forall x \geq 0$, $0 \leq \sigma^2$

OK.

si $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$, h continua

$\widehat{h(\theta)} \xrightarrow{P} h(\hat{\theta})$

$h(\hat{\theta}) \xrightarrow{P} h(\theta)$

entonces es consistente.

437/03

1) $X_1 \ldots X_n$ v.a. iid

$X_1 \sim P(\lambda)$

$E(X_1) = \lambda$

$V(X_1) = \lambda$

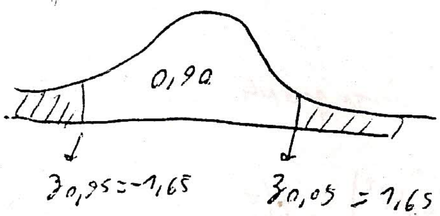
$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \underset{\text{iid}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda = n \cdot \lambda \qquad \hat{\lambda} = \bar{X} \xrightarrow{P} E(X) = \lambda$$

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda = n\lambda$$

Por el T.C.L. para n suficientemente grande

Por LGN

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \approx Z \sim N(0,1)$$



$$P\left(z_{0,95} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\sqrt{n\hat{\lambda}}} \le z_{0,05}\right) \simeq 0,90$$

uso el estimador

$P(X \le z_{0,05}) = 1 - 0,05$

$P(X \le 0,95) =$

$$= P\left(z_{0,95} \cdot \sqrt{n\hat{\lambda}} - \sum_{i=1}^{n} X_i \le -n\lambda \le z_{0,05}\sqrt{n\hat{\lambda}} - \sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$$

$$= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - z_{0,05}\sqrt{n\hat{\lambda}}}{n} \le \lambda \le \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - z_{0,95}\sqrt{n\hat{\lambda}}}{n}\right) = 0,90$$

El I.C. = $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - z_{0,05}\sqrt{n\hat{\lambda}}}{n}, \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - z_{0,95}\sqrt{n\hat{\lambda}}}{n}\right)$ tiene nivel aproximado 0,90 para λ.

$$\frac{\sum x_i - z_{0,05}\sqrt{\sum x_i}}{n} \qquad n \cdot \bar{X} \qquad \frac{\cancel{n} \cdot \sum x_i}{\cancel{n}}$$