RECUPERA 2°P.

1	2	3	4	Calificación
B	B	B	B	10 (DIEZ)

APELLIDO Y NOMBRE: CULACIATI DANTE NO. DE LIBRETA: 351/22

CARRERA: LIC. EN CS. DE LA COMPUTACIÓN

TURNO: Mañana A-K ☑ Mañana L-Z ☐ Noche A-K ☐ Noche L-Z ☐

Álgebra I

Primer Cuatrimestre 2022 - Primer recuperatorio del primer parcial - 12/07/2022

---

1. **[2.5 ptos]** Sean $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$ y $\mathcal{F}$ el conjunto formado por las funciones inyectivas de A en B, es decir, $\mathcal{F} = \{g : A \to B \mid g \text{ es inyectiva}\}$. Se define en $\mathcal{F}$ la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ dada por

$$g\,\mathcal{R}\,h \qquad \Longleftrightarrow \qquad \#\{n \in A \mid g(n) \leq 8\} = \#\{n \in A \mid h(n) \leq 8\}.$$

   (a) [0.5 ptos] Hallar la cantidad de clases de equivalencia determinadas por $\mathcal{R}$.

   (b) [2 ptos] Hallar el cardinal de la clase de equivalencia de la función $g(n) = 2n$.

2. **[2.5 ptos]** Demostrar que para todo $n \geq 2$ vale que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}.$$

3. **[2.5 ptos]** Calcular el resto de dividir

$$\sum_{k=4}^{134} (k! + k^3)$$

por 7.

4. **[2.5 ptos]** Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 7$ y $b \equiv 1$ (3). Hallar los posibles valores de $(63a - b^2 : 42)$ y dar un ejemplo para cada caso

---

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

Dante Culaciati | DNI: 45.423.379 LU: 331/22 | HOJA N° 1 FECHA 12/07/22

1) Tengo $A = \{1,2,3,\dots,10\}$, $B=\{1,2,3,\dots,30\}$ y F el conjunto formado por las funciones inyectivas de A en B, es decir, $F = \{g: A \to B \mid g \text{ es inyectiva}\}$

Se define en F la relación de equivalencia dada por

$$g \mathrel{R} h \iff \#\{n \in A \mid g(n) \leq 8\} = \#\{n \in A \mid h(n) \leq 8\}$$

a) Quiero hallar la cantidad de clases de equivalencia determinadas por R.

Observo que, como toda función $g \in F$ es inyectiva, vale que $g(a) = g(b) \iff a=b$, $a,b \in$

Entonces, tengo que elegir 10 elementos distintos de B para "asignárselos" a los 10 elementos de A.

Antes de seguir, recordemos que una clase de equivalencia $\bar{g}$ se define como (en este caso) $\bar{g} = \{h \in F : g \mathrel{R} h\}$

Observemos que $g \mathrel{R} h \iff g$ y h tienen la misma cantidad de elementos en su imágen menores o iguales a 8.

Como h es inyectiva (y g también) y en B tengo 8 elementos menores o iguales a 8 (y también, A tiene más de 8 elementos a los cuales les puedo asignar un valor), entonces h puede tener 0,1,2,3,4,5,6,7 u 8 elementos en su imágen que sean menores o iguales a 8.

Por lo tanto, R determina 9 clases de equivalencia distintas.

(Sigue a la vuelta)

b) Quiero hallar el cardinal de la clase de equivalencia de la función $g(n) = 2n$

Primero, notamos que $\bar{g} = \{h \in I \mid h \mathcal{R} g, \text{ con } g(n) = 2n\}$

Para facilitar la resolución, calculo los posibles valores de $g(n)$ $\forall n \in A$

$$\underbrace{\begin{matrix} -g(1)=2 & -g(3)=6 \\ -g(2)=4 & -g(4)=8 \end{matrix}}_{\text{Elementos menores o iguales a } 8} \quad \begin{matrix} -g(5)=10 & -g(7)=14 & -g(9)=18 \\ -g(6)=12 & -g(8)=16 & -g(10)=20 \end{matrix}$$

Como se puede ~~observar~~ observar, $g(n) = 2n$ tiene 4 elementos en su imagen menores o iguales a 8. Entonces, quiero calcular la cantidad de funciones $h \in F$ tal que h tiene <u>exactamente</u> 4 elementos menores o iguales a 8.

Comienzo eligiendo 4 valores de A a los cuales les voy a asignar un elemento de B que sea menor o igual a 8. Como A tiene 10 elementos, tengo $\binom{10}{4}$ maneras de hacer esto.

Como en B tengo 8 elementos menores o iguales a 8, y quiero quedarme con 4 de ellos (distintos) para asignárselos a los 4 elementos de A ya elegidos, tengo $\frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!}$ maneras de hacer esto.

Para los 6 elementos restantes de A, tengo que elegir algunos de los 22 elementos restantes de B, todos distintos (pues h es inyectiva), y todos son mayores a 8. Tengo $\frac{22!}{(22-6)!} = \frac{22!}{16!}$ maneras de hacer esto.

Finalmente, existen $\boxed{\binom{10}{4} \cdot \frac{8!}{4!} \cdot \frac{22!}{16!}}$ funciones h en la clase de equivalencia de $g(n) = 2n$.

NOTA

DANTE CULACIATI

HOJA N° 2

FECHA

2) Quiero demostrar para todo $n \geq 2$ que vale la siguiente proposición

$$p(n): \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Lo pruebo por inducción (corrida).

Caso base

¿Vale $p(2)$?

$$p(2): \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} < 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$$

Como $\frac{5}{4} < \frac{6}{4}$, $p(2)$ es verdadera.

Paso inductivo

Hipótesis Inductiva (HI): Asumo que vale $p(h)$ para $h \in \mathbb{N}$, $h \geq 2$.

Quiero ver que $p(h) \Rightarrow p(h+1)$. Es decir

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{h} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{h}\right)}_{\text{(verdadero por HI)}} \Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{h+1} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{h+1}\right)$$

Pero
$$\sum_{i=1}^{h+1} \frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(h+1)^2} \overset{(HI)}{<} \left(2 - \frac{1}{h}\right) + \frac{1}{(h+1)^2}$$

Basta con probar que $\left(2 - \frac{1}{h}\right) + \frac{1}{(h+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{h+1}$

Vale ~~[illegible]~~ este menor o igual pues tengo la siguiente cadena de desigualdades

$$\sum_{i=1}^{h+1} \frac{1}{i^2} < \left(2 - \frac{1}{h}\right) + \frac{1}{(h+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{h+1}$$

si vale esto, vale que $\sum_{i=1}^{h+1} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{h+1}$

NOTA

$$2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2} \leq 2-\frac{1}{n+1}$$

$$\iff -\frac{1}{n}+\frac{1}{\cancel{\quad}} \leq -\frac{1}{n+1}$$

(Cambia el sentido pues pasé el (-1) multiplicando)

$$\iff \frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)(n-1)} \geq \frac{1}{n+1}$$

(No cambia el sentido pues como $n \geq 2$, $n+1 \geq 3$)

$$\iff \frac{(n+1)}{n}-\frac{(n+1)}{(n+1)(n-1)} \geq 1$$

$$\iff \frac{n+1}{n}-\frac{1}{n-1} \geq 1$$

$$\iff \frac{(n+1)(n-1)-n}{n(n-1)} \geq 1$$

$$\iff n.$$

$$2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2} \leq 2-\frac{1}{n+1}$$

$$\iff -\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1} \leq -\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\iff -\frac{(n+1)-n}{n(n+1)} \leq -\frac{1}{n^2+2n+1}$$

$$\iff \frac{-1}{n^2+n} \leq -\frac{1}{n^2+2n+1}$$

(paso el (-1))

$$\iff \frac{1}{n^2+n} \geq \frac{1}{n^2+2n+1}$$

$$\iff n^2+2n+1 \geq n^2+n$$

(No cambia la desigualdad pues, como $n \geq 2$, tanto n^2+2n+1 como n^2+n son siempre mayores (estricto) a 0 (por lo que tampoco hay problema con que estén en el denominador)).

$$\iff n+1 \geq 0 \quad \checkmark$$

(Vale siempre, pues $n \geq 2$).

Por lo tanto, tengo que $p(n) \Rightarrow p(n+1)$. Como el caso $p(2)$ ya fue probado, por el principio de inducción (corrida), tengo que $p(n)$ es verdadero para todo $n \geq 2$, como se quería probar. $\square$

(Ejercicio 3) en hoja 3).

DANTE CULACIATI | HOJA N° 3 | FECHA

3) Quiero calcular el resto de dividir por 7 a

$$\sum_{k=4}^{134} (k! + k^3)$$

(Vale la pena aclarar que mirar el resto es equivalente a tomar congruencia)

Observo que puedo separar la sumatoria y evaluar cada caso por separado

$$\sum_{k=4}^{134} (k! + k^3) = \sum_{k=4}^{134} k! + \sum_{k=4}^{134} k^3$$

Tengo que $\sum_{k=4}^{134} k! = \underbrace{4! + 5! + 6!} + \underbrace{7! + \dots + 134!}$

Estos sumandos, por sí solos, no son congruentes a 0 módulo 7, pues, como 7 es primo, NO se puede escribir como producto de otros primos (o compuestos).
Entonces, $7 \nmid m!$ para $1 \leq m \leq 6$, $m \in \mathbb{N}$
(Pues 7 no aparece como factor en $m!$, con $1 \leq m \leq 6$, $m \in \mathbb{N}$)

Estos sumandos son congruentes a 0 módulo 7, pues $7 \mid m!$ para $m \geq 7$, $m \in \mathbb{N}$
ya que $m!$ con $m \geq 7$ "contiene" a 7 como factor

Entonces $\sum_{k=4}^{134} k! \equiv 4! + 5! + 6! = 24 + 120 + 720 = 864 \equiv \underline{3} \pmod 7$

Por otro lado, tengo que $\sum_{k=4}^{134} k^3 = 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + \dots + 134^3$

Puedo tomar congruencia a cada sumando. Para ello, hago una tabla de restos módulo 7:

$k \pmod 7$	0	1	2	3	4	5	6
$k^3 \pmod 7$	0	1	1	6	1	6	6

$(0+1+1+6+1+6+6 = 21 \equiv 0 \pmod 7)$

(Luego, cada "bloque" de 7 números congruentes del 0 al 6, módulo 7, es a su vez congruente a 0 módulo 7). (SIGUE A LA VUELTA)

Entonces, $\sum_{k=4}^{134} k^3 \equiv \underbrace{4^3 + 5^3 + 6^3}_{\equiv 1+6+6 = 13 \equiv 6 \pmod 7} + \underbrace{\overset{k=7}{0^3} + 1^3 + \dots + 0^3 + \overset{k=134}{1^3}}$

Entre $k=7$ y $k=134$, tengo $(134-7)+1 = 128$ elementos, que puedo dividir en $\left\lfloor \frac{128}{7} \right\rfloor = 18$ bloques de 7 elementos (congruentes del 0 al 6 módulo 7), que a su vez son congruentes a 0 módulo 7 (los bloques). Y le agrego el 0^3+1^3 del final.

Luego, $\sum_{k=4}^{134} k^3 \equiv 6 + 0^3 + 1^3 = 7 \equiv \underline{0} \pmod 7$

Finalmente, $\sum_{k=4}^{134} (k! + k^3) \equiv 3 + 0 \equiv 3 \pmod 7$

$\boxed{\text{Por lo tanto, el resto de dividir por 7 a } \sum_{k=4}^{134}(k!+k^3) \text{ es igual a } \underline{3}.}$

~~(Ejercicio 4) en hoja 4.~~

Dante Culaciati

HOJA Nº 4

FECHA

4) Tengo $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a:b) = 7$ y $b \equiv 1\ (3)$. Quiero hallar los posibles valores de $(63a - b^2 : 42)$, y dar un ejemplo para cada caso.

En primer lugar, como $(a:b) = 7$, puedo coprimizar.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{7} = c \iff a = 7c \\ \\ \frac{b}{7} = d \iff b = 7d \end{array}\right\} \Rightarrow (c:d) = 1$$

Luego, escribo a 42 como producto de factores primos

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Entonces, reemplazando

(Saco factor común 7, que se puede por propiedades del MCD)

$$(63a - b^2 : 42) = (63 \cdot 7c - 7^2 d^2 : 2 \cdot 3 \cdot 7) = 7\underbrace{(63c - 7d^2 : 2 \cdot 3)}$$

(Llamo a este número X)

Luego, considero un $X \in \mathbb{Z}$ / $(63c - 7d^2 : \overset{=6}{\widehat{2 \cdot 3}}) = X$. Por lo tanto,

$$\begin{cases} X \mid 63c - 7d^2 \\ X \mid 2 \cdot 3 \end{cases}$$

Entonces, los posibles valores (por ahora) de X son 1, 2, 3 ó 6.

Para ver en qué casos vale esto, tengo que ver cuando vale que $2 \mid X$ o $3 \mid X$ (considero a 2 y 3 porque son primos.

Además, $1 \mid X\ \forall X \in \mathbb{Z}$ y si $2 \mid X \wedge 3 \mid X \Rightarrow 6 \mid X$, $\forall X \in \mathbb{Z}$).

¿$2 \mid X$?

$$2 \mid X \iff \begin{cases} 2 \mid 63c - 7d^2 \\ 2 \mid 2 \cdot 3 \end{cases} \iff 63c - 7d^2 \equiv 0 \pmod 2$$

(Saco la otra condición pues es verdadera siempre en $\mathbb{Z}$)

(SIGUE A LA VUELTA)

NOTA

$\left(\begin{array}{l} 63 \equiv 1 \pmod 2 \\ -7 \equiv 1 \pmod 2 \end{array}\right)$

$$\text{Pero } 63c - 7d^2 \equiv c - d^2 \equiv 0 \pmod 2 \iff c \equiv d^2 \pmod 2$$

Como los únicos valores posibles de c y d (módulo 2) son 0 y 1, entonces d^2 sólo puede ser 0 ($0^2 \equiv 0$ (2)) o 1 ($1^2 \equiv 1$). Por lo tanto, ($d^2 \equiv d \pmod 2$)

Luego, $c \equiv d^2 \pmod 2 \iff c \equiv d \pmod 2 \iff$ c y d son ambos pares, o ambos impares.

Luego, $2 \mid X \iff c$ y d son ambos pares o ambos impares.

Pero eso no puede suceder pues $c \perp d$.

¿$3 \mid X$?

$$3 \mid X \iff \begin{cases} 3 \mid 63c - 7d^2 \\ 3 \mid 2\cdot 3 \end{cases} \iff 63c - 7d^2 \equiv 0 \pmod 3$$

(La segunda condición vale siempre (en $\mathbb{Z}$))

($-7 \equiv -1 \pmod 3$)
($63 \equiv 0 \pmod 3$)

$$\text{Pero } 63c - 7d^2 \equiv -d^2 \equiv 0 \pmod 3 \overset{(-1 \perp 3)}{\iff} d^2 \equiv 0 \pmod 3$$

Recordemos que $b \equiv 1 \pmod 3$ y $b = 7d$. Por lo tanto, $7d \equiv 1 \pmod 3$

Pero $7d \equiv d \equiv 1 \pmod 3$. Entonces, $d^2 \equiv 1^2 = 1 \not\equiv 0 \pmod 3$
($7 \equiv 1 \pmod 3$)

Por lo tanto, $3 \nmid X$, para cualquier a y b, $a, b \in \mathbb{Z}$.

Entonces, los posibles valores de X son:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si } c \text{ y } d \text{ son uno par y el otro impar.} \\ 2 & \text{si } c \text{ y } d \text{ son ambos pares o ambos impares.} \end{cases}$$

Luego, como $(63a - b^2 : 42) = 7 \cdot X$, me queda que (Aclaro que multiplicar por 7 no cambia la paridad de c y d)

$$\boxed{(63a - b^2 : 42) = \begin{cases} 7 & \text{si } a \text{ y } b \text{ son uno par y el otro impar} \\ 14 & \text{si } a \text{ y } b \text{ son ambos pares o ambos impares} \end{cases}}$$

Ejemplos

$(a,b) = (0,7) \Rightarrow (63a - b^2 : 42) = (-7^2 : 2\cdot 3\cdot 7) = \boxed{7}$

$(a,b) = (7,7) \Rightarrow (63a - b^2 : 42) = (63\cdot 7 - 49 : 2\cdot 3\cdot 7) = (392 : 2\cdot 3\cdot 7) = (2^3\cdot 7^2 : 2\cdot 3\cdot 7) = \boxed{14} = 2\cdot 7$

(Notar que en ambos casos, $(a:b) = 7$ y $b \equiv 1$ (3))