1

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (Comp.)

PRIMER PARCIAL 22/05/07

TEMA 1

Aprobado

Apellido y nombre... ....

Número de libreta: ....

Número de hojas entregadas: ....5....

Turno de Trabajos Prácticos (Tache el que no corresponda)

Tarde: Ma-Ju 13 a 16 hs.
~~Noche: Ma-Ju 18 a 21 hs.~~

Por favor:
Resuelva cada ejercicio en hojas separadas.
Numere todas las hojas y coloque en cada una su Nombre y Apellido.
El parcial se aprueba con 60 puntos.

Ejercicio	Puntaje	Nota
1	25	20
2	25	17
3	15	5
4	20	20
5	15	12
Total	100	74

EJERCICIO 1: Se tienen dos tetraedros distinguibles y equilibrados, cada uno con sus caras numeradas del 1 al 4. Se arrojan los dos tetraedros y se observan cuáles son los dos números obtenidos en la cara inferior. Se definen las variables aleatorias:

X : módulo de la diferencia de los resultados obtenidos en los dos lanzamientos
Y : máximo entre los dos resultados

a) Hallar la distribución conjunta de (X,Y).
b) Hallar las funciones de probabilidad marginal $p_X(x)$ y $p_Y(y)$
c) ¿Son X e Y independientes? Justificar.
d) Calcular $P(X+Y>3|Y>1)$

EJERCICIO 2: Una empresa posee dos máquinas automáticas que producen tornillos. El diámetro en mm. de los tornillos producidos por la máquina A es una variable aleatoria con distribución $U(2;6)$. El diámetro de los tornillos producidos por la máquina B es una variable aleatoria que tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x)=(0.25x-0.5)I_{(2;4)}(x)+(1.5-0.25x)I_{[4;6)}(x)$$

Se sabe además que la producción de la máquina A es el triple que la de la máquina B. Un tornillo se considera defectuoso si su diámetro **no está** entre 3 y 4 mm.

a) Hallar la probabilidad de que un tornillo producido por la máquina A sea defectuoso. Idem para la máquina B.
b) Hallar la probabilidad de que un tornillo elegido al azar de la producción total sea defectuoso.
c) Si se extraen 5 tornillos con reposición, producidos por una de las dos máquinas, y de ellos 2 resultan defectuosos, hallar la probabilidad de que provengan de la máquina A.
d) Se sacan tornillos con reposición de la producción total hasta encontrar el primer defectuoso. Hallar el número esperado de tornillos extraídos.

EJERCICIO 3: En una caja hay 50 bolillas de las cuales 30 son amarillas y 20 son rojas. 15 de las bolillas rojas están marcadas con la letra M. Se extraen al azar y sin reposición 4 bolillas. Sean los sucesos:
A = "hay 3 bolillas rojas entre las 4 seleccionadas"
B = "hay 2 bolillas marcadas con la letra M entre las 4 seleccionadas"

a) Calcular la probabilidad de que ocurra el suceso A ó el suceso B.
b) Si se sabe que B no ocurrió, calcular la probabilidad de que ocurra el suceso A.
c) ¿Son A y B sucesos mutuamente excluyentes? Justificar.

EJERCICIO 4: X es una variable aleatoria continua con función de distribución acumulada:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & si\ x<5\\ \frac{1}{8}(x^2-8x)+\frac{15}{8} & si\ 5\leq x<7\\ 1 & si\ x\geq 7\end{cases}$$

a) Calcular $P(3\leq X<6)$.
b) Calcular el percentil 0.375 de X.
c) Hallar la función de densidad de $Y=\sqrt{X}$.

Ejercicio 5. Diga cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, justificando su respuesta.

a) Si $X\sim P(\lambda)$ y *a* y *b* son constantes, entonces $V(aX+b)=a^2\lambda+b$
b) Si $A\subseteq B$, entonces $P(B|A)=P(B)$
c) En el espacio de equiprobabilidad $S=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, los eventos $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,b,f,g\}$ y $C=\{c,d,f,g\}$ son independientes.

d) Si $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son funciones de probabilidad puntual definidas sobre N, entonces $\frac{1}{3}p_1(x)+\frac{2}{3}p_2(x)$ también es una función de probabilidad puntual definida sobre N.

e) Si A y B son mutuamente excluyentes, $P(A)>0$ y $P(B)>0$, entonces $P(A|B)=0$

X: módulo de la diferencia de los resultados obtenidos en los 2 lanzamientos.

Y: máximo entre los 2 resultados

a, b).

Y \ X	0	1	2	3	$p_X(x)$
1	1/16	0	0	0	1/16
2	1/16	2/16	0	0	3/16
3	1/16	2/16	2/16	0	5/16
4	1/16	2/16	2/16	2/16	7/16
$p_Y(y)$	4/16	6/16	4/16	2/16	

$S = \{(x,y) \text{ tq } x,y \in \{1,2,3,4\}\}$

c). $P(0,1) = P(x=0 \wedge y=1) = 1/16$

$P(X=0) = 4/16$

$P(Y=1) = 4/16$

$P(0,1) \neq P(X=0) \cdot P(Y=1)$

$1/16 \neq 4/16 \cdot 4/16$

$1/16 \neq 1$

$\Longrightarrow$ X e Y no son independientes.

d). $P(X+Y>3 \mid Y>1) = \dfrac{P(X+Y>3 \cap Y>1)}{P(Y>1)} = \dfrac{11/16}{12/16} = \dfrac{11}{12} \cong 0.9166$

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

$\dfrac{15}{16}$

). X_i = diametro de los tornillos en mm. Fabricados por máquina i, $i \in \{A, B\}$

$X_A \sim \mathcal{U}(2,6)$ $P(\text{maq } A) = (3/4)$

X_B sigue la densidad $f_X(x) = (0{,}25x - 0{,}5)\, I_{(2,4)}(x) + (1{,}5 - 0{,}25x)\, I_{(4,6)}(x)$

$P(\text{maq } B) = (1/4)$

Un tornillo se considera defectuoso si su diámetro no está entre 3 y 4 mm.

a). $P(\text{tornillo de A defectuoso}) = 1 - [P(3 < x < 4)]$

$$= 1 - \left[\frac{4-2}{6-2} - \frac{3-2}{6-2}\right]$$
$$= 1 - [1/2 - 1/4]$$
$$= 1 - 1/4$$
$$= 3/4$$

$$P(\text{tornillo de B defectuoso}) = 1 - \int_3^4 0{,}25x - 0{,}5\, dx = 1 - \left[0{,}25 \cdot \frac{x^2}{2} - 0{,}5x\right]\Big|_3^4 =$$

$$= 1 - \left[(2-2) - (9/8 - 3/2)\right] = 1 - 3/8 = 5/8$$

b). $P(\text{tornillo defectuoso}) = P\left(\begin{smallmatrix}\text{tornillo}\\ \text{defectuoso}\end{smallmatrix} \,\middle|\, \text{maq } A\right) \cdot P(\text{maq } A) + P\left(\begin{smallmatrix}\text{tornillo}\\ \text{defectuoso}\end{smallmatrix} \,\middle|\, \text{maq } B\right) \cdot P(\text{maq } B)$

$$= 3/4 \cdot 3/4 + 5/8 \cdot 1/4$$
$$= 23/32 \cong 0{,}719$$

c). llamo U = cantidad de un total de 5 tornillos que resultan defectuosos.

$U \sim B: (5, 23/32)$

$P(U=2) = \binom{5}{2}(23/32)^2 \cdot (9/32)^3 = 10 \cdot \frac{529}{1024} \cdot \frac{729}{32768} \cong 0{,}115$

mal

$$P(A \mid 2 \text{ resultaron def}) = \frac{P(A \cap 2 \text{ resultaron def})}{P(2 \text{ resultaron def})} = \frac{P(A \cap 2 \text{ resultaron def})}{0{,}115}$$

$P(A \cap 2 \text{ resultaron def}) = ?$ $V \sim B: (5, 3/4)$

$P(V=2) = \binom{5}{2}(3/4)^2(1/4)^3 = 10 \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{64} \cong 0{,}0879$

$\Longrightarrow P(A \mid 2 \text{ resultaron def}) = \dfrac{0{,}0879}{0{,}115} = 0{,}7643$

d).- $Z \sim \mathcal{G}(23/32)$

$$\Rightarrow E(Z) = \frac{1}{23/32} = \frac{32}{23} \cong 1,3913$$

).

30 Amarillas
15 rojas con M
5 rojas sin M

→ 4 bolillas

A: hay 3 bolillas rojas entre las 4 seleccionadas

B: " 2 bolillas marcadas con la M entre las 4 seleccionadas.

a). $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Ⓐ $x \sim \mathcal{H}(m=4, N=50, D=20)$ ← buenisimo!

$$P(A) = P(x_1 = 3) = \frac{\binom{20}{3}\binom{30}{1}}{\binom{50}{4}} \cong 0{,}1485$$

Ⓑ $x_2 \sim \mathcal{H}(m=4, N=50, D=15)$

no era 15?

$$P(B) = P(x_2 = 2) = \frac{\binom{\cancel{30}\,35}{2}\binom{20}{1}}{\binom{50}{4}} \cong 0{,}0378 \quad X$$

· Ⓐ∩Ⓑ $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot \underbrace{P(B)}_{\text{ya lo tengo}}$

$P(A|B) = P($1 roja sin la M y 1 amarilla, entre las 48 bolillas que quedan de sacar 2 bolillas marcadas con la M$)$

1 amarilla ⟶ $x_3 \sim \mathcal{H}(m=1, N=48, D=30)$ ①
1 roja sin la M ⟶ $x_4 \sim \mathcal{H}(m=1, N=47, D=5)$ ②

① $$P(x_3 = 1) = \frac{\binom{30}{1}\binom{18}{0}}{\binom{48}{1}} = 0{,}625$$

② $$P(x_4 = 1) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{42}{0}}{\binom{47}{1}} = 0{,}106$$

$P(A|B) = 0{,}625 + 0{,}106 = 0{,}731$ NO.

$\Longrightarrow P(A \quad B) = 0{,}731 \cdot 0{,}0378 \cong 0{,}0276$

$\Longrightarrow P(A \cup B) = 0{,}1485 + 0{,}0378 - 0{,}0276 = 0{,}1587$ X i). $P(A \mid B^c) = 1 - \underbrace{P(A \mid B)}_{\text{ya calculado}} = 1 - 0{,}731 = 0{,}269$

MAL, eso no vale sino
$P(A^c \mid B) = 1 - P(A \mid B)$

j). No son excluyentes, pues $P(A \cap B) \neq 0$, es decir, entre las 3 rojas sobre 4 que me verifican A, puede haber 2 marcadas con la letra M, que me verifican B.

7)\. a)\. $P(3 \leq X < 6) = F_X(6) - F_X(3) = \frac{1}{8}(x^2 - 8x) + \frac{15}{8} \Big|_5^6 - 0 =$

$\frac{x^2+15}{8} - x \Big|_5^6 = 0{,}375 - 0 = 0{,}375$

b)\. el percentil 0,375 de X es 6 por lo calculado en a)
Veamos si es cierto

$\frac{x^2+15}{8} - x \Big|_5^t = 0{,}375$

$\frac{t^2+15}{8} - t - 0 = 0{,}375$

$\frac{t^2+15}{8} = 0{,}375 + t$

$t^2 + 15 = 8\,(0{,}375 + t)$

$t^2 + 15 = 3 + 8t$

$t^2 - 8t + 12 = 0$

$\frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}$ → $t_1 = 2$ ¡Absurdo ; $t_2 = 6$

$t_1 = 2$ no puede ser, ya que $F_X(2) = 0$

$\Longrightarrow$ el percentil 0,375 de X es 6 !

).- $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y) \underset{\substack{\uparrow \\ x \geq 5}}{=} P(X \leq y^2) = F_X(y^2) =$

$$= \frac{(y^2)^2 + 15}{8} - y^2 = \frac{y^4 + 15}{8} - y^2$$

$$F_Y(y) = \frac{y^4+15}{8} - y^2$$

veamos donde se mueve Y

$$5 \leq x \leq 7$$
$$\sqrt{5} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{7}$$
$$\sqrt{5} \leq Y \leq \sqrt{7}$$

$$\Longrightarrow f_Y(y) = \left(\frac{1}{8} \cdot 4y^3 - 2y\right) I_{(\sqrt{5}, \sqrt{7})}(y)$$

$$f_Y(y) = \frac{y^3 - 4y}{2} I_{(\sqrt{5}, \sqrt{7})}(y) \checkmark$$

i)_ a)_ Falsa

Si X es una variable aleatoria con esperanza μ y varianza σ^2

$\Longrightarrow E(Y = aX + b) = a\,E(X) + b$ y $V(Y = aX + b) = a^2\,V(X)$

como $X \sim P(\lambda) \Longrightarrow V(X) = \lambda$

$V(aX + b) = a^2\lambda$ y no $a^2\lambda + b$

b)_ Falsa

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

Esto vale sólo si B comprende todo el espacio muestral.

c)_

perdón por la desprolijidad, quedaba mejor así que un enchastre con Liquid Paper ! ☺

Falsa

$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = P(e) = P(f) = P(g) = P(h) = 1/8$

$P(A) = \left(\frac{1}{8}\right)^4 \qquad P(B) = \left(\frac{1}{8}\right)^4$

$A \cap B = \{a, b\}$

$P(A \cap B) = \left(\frac{1}{8}\right)^2$

mal justificado.

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

d)_ Verdadera

$$\sum_{x \in R_x} p_1(x) = 1 \qquad \sum_{x \in R_x} p_2(x) = 1$$

$$\underbrace{p_1(x) \geq 0 \qquad p_2(x) \geq 0}_{\text{por ser funciones de prob. puntual}}$$

$$\Longrightarrow \sum_{x \in R_x} p_1(x) + \sum_{x \in R_x} p_2(x) = 2$$

pero $\frac{1}{3} \sum_{x \in R_x} p_1(x) + \frac{2}{3} \sum_{x \in R_x} p_2(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

$\Longrightarrow \frac{1}{3} p_1(x) + \frac{2}{3} p_2(x)$ es una función de prob. puntual.

). Verdadera

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$$

por ser excluyentes no tienen intersección

22/05/07

5.

a) $V(aX+b) = E\left[\left(aX+b-E(aX+b)\right)^2\right]$

$\underset{\substack{\uparrow \\ X \text{ es v.a.} \\ \text{discreta}}}{=} \sum_{x\in R(X)} \left(aX+\cancel{b}-aE(X)-\cancel{b}\right)^2 p_X(x)$

$= a^2 \sum_{x\in R(X)} \left(x-E(X)\right)^2 p_X(x) = a^2 V(X) \underset{\substack{\uparrow \\ X\sim P(\lambda)}}{=} a^2\lambda$

FALSO

b) $A \subseteq B \Rightarrow P(A\cap B) = P(A)$

$P(B|A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$ FALSO

c) $S=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$

$A=\{a,b,c,d\}$ $B=\{a,b,f,g\}$ $C=\{c,d,f,g\}$

$\#S=8$ $\#A=\#B=\#C=4$

$P(A\cap B\cap C) = \frac{0}{8} = 0 \neq \underbrace{P(A)}_{=\frac{1}{2}}\underbrace{P(B)}_{=\frac{1}{2}}\underbrace{P(C)}_{=\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$

$P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{2}$

FALSO

NOTA

d)

$$\sum_{x \in R(X)} p_1(x) = 1 \qquad \sum_{x \in R(X)} p_2(x)$$

$$p_1(x) \geq 0 \quad \forall x \in R(X)$$

$$p_2(x) \geq 0 \quad \forall x \in R(X)$$

$$\sum_{x \in R(X)} \frac{1}{3} p_1(x) + \frac{2}{3} p_2(x)$$

$$\frac{1}{3} p_1(x) + \frac{2}{3} p_2(x) \quad \forall x \in R(X)$$

$$\sum_{x \in R(X)} \frac{1}{3} p_1(x) + \frac{2}{3} p_2(x) = \frac{1}{3} \underbrace{\sum_{x \in R(X)} p_1(x)}_{=1} + \frac{2}{3} \underbrace{\sum_{x \in R(X)} p_2(x)}_{=1}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \qquad \text{VERDADERA}$$

e) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$$

NOTA

HOJA N° 2

FECHA

2.

X_A: diámetro en mm de un tornillo producido por la máquina A.

X_B: diámetro en mm de un tornillo producido por la máquina B

$X_A \sim U[2,6]$

Función de densidad de X_B:

$$f_B(x) = (0.25x - 0.5)\, I_{(2,4)}(x) + (1.5 - 0.25x)\, I_{[4,6)}(x)$$

A: El tornillo fue producido por la máq A

$P(A) = \frac{3}{4}$

D: El diam del tornillo no está entre 3 y 4 mm

$$P(X_A < 3 \cup X_A > 4) = 1 - P((X_A < 3 \cup X_A > 4)^c)$$
$$= 1 - P(3 \leq X_A \leq 4)$$
$$= 1 - \int_3^4 \frac{1}{4}\, dx$$
$$= 1 - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{3}{4}$$

NOTA

$$P(X_B < 3 \cup X_B > 4) = 1 - P(3 \leq X_B \leq 4)$$

$$= 1 - \int_3^4 \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\,dx$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x\right]_3^4$$

$$= 1 - \left[\cancel{2} - \cancel{2} - \frac{9}{8} + \frac{3}{2}\right]$$

$$= \frac{5}{8}$$

b) $P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|A^c)P(A^c)$

$$= \frac{3}{4} * \frac{3}{4} + \frac{5}{8} * \frac{1}{4} = \frac{23}{32}$$

c) T: # tornillos defectuosos de un total de 5 extraídos

$$T | X_A \sim Bi\left(5, \frac{3}{4}\right)$$

$$T | X_B \sim Bi\left(5, \frac{5}{8}\right)$$

$$P(A|T=2) = \frac{P(T=2|A)P(A)}{P(T=2)}$$

$$= \frac{P(T=2|A)P(A)}{P(T=2|A)P(A)+P(T=2|A^c)P(A^c)}$$

$$= \frac{\cancel{\binom{5}{2}}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3}{\cancel{\binom{5}{2}}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cancel{\binom{5}{2}}\left(\frac{5}{8}\right)^2\left(\frac{3}{8}\right)^3} = \frac{32}{107}$$

d) W: # tornillos extraídos hasta hallar el 1º defectuoso

$$W \sim G\left(\frac{23}{32}\right)$$

$$E(W) = \frac{1}{\frac{23}{32}} = \frac{32}{23}$$

3.

30 A
15 R M
5 R

$\xrightarrow{\text{4 sin repo}}$

X: # bolillas rojas entre las 4 extraídas sin reposición

$$X \sim \mathcal{H}(50, 20, 4)$$

Y: # bolillas rojas marcadas entre las 4 extraídas sin repo

$$Y \sim \mathcal{H}(50, 15, 4)$$

$$P(A) = P(X=3) = \frac{\binom{20}{3}\binom{30}{1}}{\binom{50}{4}} = \frac{342}{2303}$$

$$P(B) = P(Y=2) = \frac{\binom{15}{2}\binom{35}{2}}{\binom{50}{4}} = \frac{51}{188}$$

$$P(A \cap B) = P(B|A)\,P(A)$$

$$= \frac{\binom{15}{2}\binom{5}{1}\cancel{\binom{30}{1}}}{\binom{20}{3}\cancel{\binom{30}{1}}} * \frac{342}{2303} = \frac{45}{658}$$

HOJA N°

FECHA

1) 4

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$= \frac{342}{2303} + \frac{51}{188} - \frac{45}{658}$$

$$= \frac{3165}{9212}$$

b) $$P(A|B^c) = \frac{P(B^c|A)\,P(A)}{P(B^c)} = \frac{\left(1-\frac{35}{72}\right)\frac{342}{2303}}{\left(1-\frac{51}{188}\right)}$$

$$= \frac{738}{6713}$$

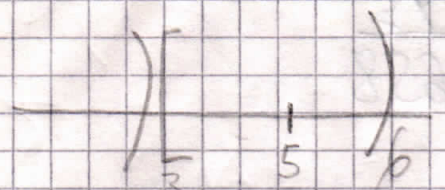
c) $$P(A\cap B) = \frac{45}{658} \neq P(A)P(B) = \frac{342}{2303} * \frac{51}{188}$$

A, B no son indep

NOTA

4.

a) $P(3 \leq X < 6) = F_X(6) - F_X(3)$



$$= \frac{1}{8}\left(6^2 - 8 * 6 + \cancel{15} - 3^2 + 8 * 3 - \cancel{15}\right) = \frac{3}{8}$$

b) $F_X(x_{0.375}) = 0.375$

$$\frac{1}{\cancel{8}}\left(x_{0.375}^2 - 8x_{0.375} + 15\right) = \frac{3}{\cancel{8}}$$

$$x_{0.375}^2 - 8x_{0.375} + 12 = 0$$

$$\frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2} \begin{matrix} \nearrow 6 \\ \searrow 2 \end{matrix}$$

$$\boxed{x_{0.375} = 6}$$

c) $Y = \sqrt{X}$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y) \overset{y \geq 0}{=}$$

$$= F_X(y^2)$$

1) 5

$$f_Y(y) = 2y\, f_X(y^2)$$

$$f_X(y^2) = \left(\frac{1}{4}y^2 - 1\right)2y \iff 5 \le y^2 < 7$$

$$\sqrt{5} \le y < \sqrt{7}$$

$$f_Y(y) = \frac{y^3}{2} - 2y \quad \underset{[\sqrt{5}, \sqrt{7})}{I}(y)$$

1.

$R_X = \{0, 1, 2, 3\}$

$R_Y = \{1, 2, 3, 4\}$

a) b)

$y \backslash x$	0	1	2	3	$P_Y(y)$
1	$\frac{1}{16}$	0	0	0	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0	$\frac{3}{16}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{5}{16}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{7}{16}$
$P_X(x)$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	1

c) $P_{XY}(1,1) = 0 \neq P_X(1)\, P_Y(1) = \frac{4}{16} * \frac{1}{16}$

X, Y no son indep

d) $P(X+Y > 3 \mid Y > 1) = \dfrac{P(X+Y>3 \cap Y>1)}{P(Y>1)}$

$= \dfrac{\frac{11}{16}}{\frac{15}{16}} = \dfrac{11}{15}$