11

APELLIDO Y NOMBRE: . ... LU N°: .

1	2	3	4
20	25	24	23

Turno: 13 a 16

92/100 Aprobado

Defina claramente todos los eventos y variables involucradas en el planteo y resolución de los ejercicios. Justifique sus respuestas.
Puntaje y criterio de aprobación: el puntaje figura junto a cada ejercicio. El parcial se aprueba con 60 puntos.

1. (20 puntos) Un mecánico tiene 6 fusibles en una caja de herramientas, sólo 2 de esos 6 son los adecuados para el modelo del auto que está reparando. Elige fusibles en forma aleatoria.

   (a) Si cada vez que prueba un fusible y no es adecuado lo vuelve a colocar en la caja: calcular la probabilidad de que se precisen como mínimo 4 intentos hasta lograr un fusible adecuado.

   (b) Si cada vez que prueba un fusible no lo vuelve a colocar en la caja: se define la variable Y = "número de intentos que realiza hasta hallar un fusible adecuado". Calcular la función de probabilidad puntual de Y.

2. (25 puntos) Se ha comprobado que la duración en meses D de ciertos componentes electrónicos sigue una distribución exponencial con **media de 6 meses**.

   (a) Hallar a tal que $P(D \leq a) = \frac{1}{5}$.

   (b) Hallar la densidad de $Y = \frac{1}{9}D^2$.

   (c) La empresa fabricante da la siguiente garantía:

   - devolución total del importe si el componente dura 4 meses o menos
   - devolución del 50% del importe si dura entre 4 y 12 meses
   - 0% de devolución si el elemento dura 12 meses o más

   Si un componente electrónico cuesta $80, hallar el valor esperado de la devolución por garantía.

3. (30 puntos) En una pequeña localidad del interior operan sólo 2 bancos, "Sur" y "Pampa". El primero capta las 3 cuartas partes de los ahorristas (cada ahorrista tiene cuenta en un sólo banco). En el banco "Sur" los saldos de las cajas de ahorro tienen una distribución normal con media de $215 y un desvío ($\sigma$) de $65, mientras que en "Pampa" tienen una distribución uniforme en el intervalo (170, 220).

   (a) Se elige un ahorrista al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su caja de ahorro tenga un saldo inferior a $200?

   (b) Se selecciona un ahorrista al azar. Sabiendo que su caja de ahorro tiene un saldo superior a $200. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga cuenta en el banco "Pampa"?

   (c) Un empleado del banco "Sur" afirma que "el 10% de las cajas de ahorro de dicho banco tienen un saldo inferior a los $A". Hallar el valor A al que se refiere el empleado.

4. (25 puntos) Considerar el par aleatorio con densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}(2-x-y) & \text{si } 0 < y < 2-x,\ x > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

   (a) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes? Justificar.

   (b) Hallar la **función de distribución** de la variable aleatoria X.

   (c) Determinar $f_{X|Y=y}(x)$.

   (d) Hallar $f_{X|Y=\frac{1}{2}}(x)$ y calcular $P(X < 1/4 \mid Y = 1/2)$.

   (e) Calcular $P(X > 7/4 \mid Y > 1/2)$.

(11) 1

1º C 06

1. 6 fusibles $\angle$ 2 adecuados, 4 no adecuados

a) X: # intentos hasta hallar un fusible adecuado

$$X \sim G\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$P(X>3) = 1 - F_X(3)$$
$$= 1 - \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right)$$
$$= \frac{8}{9}$$

b) $P_Y(1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $\quad P_Y(3) = \frac{\cancel{4}}{\cancel{6}}\frac{\cancel{3}}{5}\frac{\cancel{2}}{\cancel{4}} = \frac{1}{5}$

$P_Y(2) = \frac{\cancel{4}}{\cancel{6}_3}\frac{\cancel{2}}{5} = \frac{4}{15}$ $\quad P_Y(4) = \frac{\cancel{4}}{\cancel{6}}\frac{\cancel{3}}{5}\frac{\cancel{2}}{\cancel{4}}\frac{2}{3} = \frac{2}{15}$

$P_Y(5) = \frac{\cancel{4}}{\cancel{6}}\frac{\cancel{3}}{5}\frac{\cancel{2}}{\cancel{4}}\frac{1}{3} = \frac{1}{15}$

y	1	2	3	4	5
$P_Y(y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

2. $D \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$E(D) = 6 = \frac{1}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{1}{6}$$

a) $P(D \leq a) = \frac{1}{5}$

$$\int_0^a \frac{1}{6} e^{-\frac{1}{6}x} dx = \frac{1}{5}$$

$$1 - e^{-\frac{1}{6}a} = \frac{1}{5}$$

$$e^{-\frac{1}{6}a} = \frac{4}{5}$$

$$-\frac{1}{6}a = \ln \frac{4}{5}$$

$$a = -6 \ln \frac{4}{5}$$

b) $Y = \frac{1}{9} D^2$

$$F_Y(y) = P\left(\frac{1}{9} D^2 \leq \overset{\geq 0}{y}\right) = P(D^2 \leq 9y)$$

$$= P(|D| \leq 3\sqrt{y}) = F_D(3\sqrt{y}) - \underbrace{F_D(-3\sqrt{y})}_{\substack{\| \\ 0}}$$

$D \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{6}\right)$

(11) 2

$$f_Y(y) = \frac{3}{2\sqrt{y}} f_X(3\sqrt{y})$$

$$f_X(3\sqrt{y}) = \frac{1}{\cancel{6}} e^{-\frac{1}{\cancel{6}_2}(3\sqrt{y})} \iff 0 < 3\sqrt{y}$$

$$0 < y$$

$$f_Y(y) = \frac{\cancel{3}^1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\cancel{6}_2} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{y}} I_{(0,+\infty)}(y)$$

c) M: Monto que le devuelven en \$

Costo componente \$80

$$R_M = \{0, 40, 80\}$$

AL PEDO

$$p_M(0) = P(D \geq 12) = e^{-\frac{1}{12}}$$

$$p_M(40) = P(4 < D < 12) = \int_4^{12} \frac{1}{6} e^{-\frac{1}{6}x} dx$$

$$= F_D(12) - F_D(4) = \cancel{1} - e^{-\frac{1}{2}} \cancel{-1} + e^{-\frac{2}{3}}$$

$$p_M(80) = P(D \leq 4) = 1 - e^{-\frac{2}{3}}$$

$$E(M) = 40 * (-e^{-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{2}{3}}) + 80 * (1 - e^{-\frac{2}{3}})$$

$$= 35.2021$$

3.

A: Tiene cuenta de ahorro en Sur

$P(A) = \frac{3}{4}$

X_i: Saldo de la cuenta de ahorro en el banco i en \$ $i = S, P$

$X_S \sim N(215, 65^2)$ $X_P \sim U[170, 220]$

G: Saldo de la caja de ahorro en \$

PROB TOTAL Y PROB CONDICIONAL

a) $P(G < 200) \overset{\downarrow}{=} P(G < 200 | A) P(A) + P(G < 200 | A^c) P(A^c)$

$= P(X_S < 200) \frac{3}{4} + P(X_P < 200) \frac{1}{4}$

$= \phi\left(-\frac{3}{13}\right) \frac{3}{4} + \left(\int_{170}^{200} \frac{1}{50} dx\right) \frac{1}{4}$

$= \left(1 - \phi\left(\frac{3}{13}\right)\right) \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{3}{5}$

$= (1 - 0.5910) \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{3}{5} = 0.45675$

11 3

b) $P(A^c \mid G > 200) = \dfrac{P(G > 200 \mid A^c)\, P(A^c)}{P(G > 200)}$

$= \dfrac{(1 - P(G \leq 200 \mid A^c))\, P(A^c)}{1 - P(G \leq 200)}$

$= \dfrac{(1 - P(X_P \leq 200))\, P(A^c)}{0.54325} = \dfrac{\frac{3}{16}}{0.54325}$

$= 0.3451$

c) $P(X_S < A) = 0.1$

$\phi\left(\dfrac{A - 215}{65}\right) = 0.1$

$\phi\left(\dfrac{215 - A}{65}\right) = 0.9$

$\dfrac{215 - A}{65} = 1.28$

$A = 131.8$