TURNO: ☒ Mañana ☐ Tarde ☐ Noche

Análisis 1
Segundo Cuatrimestre de 2014 - Primer Parcial
04/10/2014

Ejercicio 1.
Hallar, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de

$$A = \{(-1)^n + \frac{16}{16n^2 - 8n + 1}\}.$$

Ejercicio 2. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)xy^4 + a\sin(x^4)}{e^{x+y}x^6 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f en $(0,0)$ para $a = 0$ y $a = 1$.

Ejercicio 3. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^7y^4}{x^6 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Analizar la diferenciabilidad de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$.

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = f(y + x^2, 2 + \sin(x^3 + y))$$

Supongamos que el polinomio de Taylor de orden 2 de g en $(0,0)$ es

$$p(x,y) = 4 + y + 3x^2.$$

Hallar $\frac{\partial f}{\partial v}(0,2)$, donde $v = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

Justifique todas sus respuestas.

① • Si n es par:

$$A = \left\{ 1 + \frac{16}{16n^2-8n+1} \right\}$$

– A es decreciente si $\frac{16}{16n^2-8n+1}$ lo es:

$$\frac{16}{16n^2-8n+1} > \frac{16}{16(n+1)^2-8(n+1)+1} \Leftrightarrow \frac{16}{16n^2-8n+1} > \frac{16}{16n^2+24n+9}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{16}(\cancel{16}n^2+24n+9) > \cancel{16}(\cancel{16}n^2-8n+1)$$

$n > -\frac{1}{4} \rightarrow$ Vale $\forall n \in \mathbb{N}$, so

la sucesión es decreciente $\forall n \in \mathbb{N}$.

Por ser estrictamente decreciente alcanza su supremo cuando $n=2$ (menor n par), $a_2 = \frac{65}{49} = \sup(A)$, que es también un máximo ($a_2 \in A$).

– $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \underbrace{\frac{16}{16n^2-8n+1}}_{\to 0} = 1$

• $1 + \frac{16}{16n^2-8n+1} > 1$

$$\frac{16}{16n^2-8n+1} > 0$$

$$16 > 0\,(16n^2-8n+1)$$

$16 > 0 \rightarrow$ Verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$

• 1 es la mayor de las cotas inferiores si $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists a \in A \,/\, 1 < \underbrace{a}\, < 1+\varepsilon$

$$1 + \frac{16}{16n^2-8n+1} < 1 + \varepsilon$$

NOTA

$$\frac{16}{16n^2-8n+1} < \varepsilon$$

$$16 < \varepsilon(16n^2-8n+1)$$

$$\frac{16}{\varepsilon} < (4n-1)^2$$

$$\frac{\sqrt{\frac{16}{\varepsilon}}+1}{4} < n \rightarrow \text{Alcanza con tomar}$$

$n > \dfrac{\sqrt{\frac{16}{\varepsilon}}+1}{4}$ para que se cumpla lo pedido.

$\therefore \inf(A) = 1$

- $1 + \dfrac{16}{16n^2-8n+1} = 1$

$$\frac{16}{16n^2-8n+1} = 0$$

$16 = 0$ - Absurdo $\Rightarrow$ A no tiene mínimo

- <u>Si n es impar</u>:

$$A = \left\{ \frac{16}{16n^2-8n+1} - 1 \right\}$$

_ Por lo mostrado antes $\dfrac{16}{16n^2-8n+1}$ es decreciente

$\forall n \in \mathbb{N}$, y eso implica que $\dfrac{16}{16n^2-8n+1} - 1$ también lo será.

$\Rightarrow$ Alcanza su supremo para $n = 1$ (menor n impar): $a_1 = \dfrac{7}{9}$

que es también su máximo ($a_1 \in A$)

_ $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{16}{16n^2-8n+1} - 1 = -1$

- $\dfrac{16}{16n^2-8n+1} - 1 > -1 \iff 16 > 0$ - Verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$.

• (-1) es la mayor de las cotas menores si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, a \in A \,/\, -1 < a < \varepsilon - 1$

$$\frac{16}{16n^2-8n+1} - 1 < -1 + \varepsilon$$

$$\frac{16}{16n^2-8n+1} < \varepsilon \iff \frac{\sqrt{\frac{16}{\varepsilon}}+1}{4} < n$$

repitiendo el mismo procedimiento realizado antes

Alcanza con tomar $n > \dfrac{\sqrt{\frac{16}{\varepsilon}}+1}{4}$ para que se cumpla lo pedido.

$\therefore \inf(A) = -1$

• $\dfrac{16}{16n^2-8n+1} - 1 = -1 \iff 16 = 0 \rightarrow$ Absurdo

$\Downarrow$

no tiene mínimo.

Respuesta: el supremo de A es el mayor de los calculados anteriormente: $\sup(A) = \dfrac{65}{49}$, que es también el máximo de A ($a_2 \in A$).

El ínfimo es el menor de los calculados: $\inf(A) = -1$, que no es su mínimo porque $\nexists\, a \in A \,/\, \dfrac{16}{16n^2-8n+1} - 1 = 1$.

2 • $\underline{a=0}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)\cdot x\,y^4}{e^{x+y}\cdot x^6 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Para que f sea continua en $(0,0)$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \|(x,y)\| <$

$$\Rightarrow \left| \frac{\cos(x)\, x \cdot y^4}{e^{x+y} \cdot x^4 + y^4} \right| < \varepsilon$$

$|\cos(x)| \leq 1$

$$\left| \frac{\cos(x)\, x \cdot y^4}{e^{x+y} \cdot x^4 + y^4} \right| \leq \frac{|x| \cdot |y|^4}{e^{x+y} \cdot x^4 + y^4} \leq_{(C.A.1)} \frac{|x| \cdot |y|^4}{|x^4 + y^4|} \leq_{(C.A.2)}$$

solo si $x+y>0$

C.A.1: $e^{x+y} \geq 1$

$e^{x+y} \cdot x^4 + y^4 \geq x^4 + y^4$

suma de potencias pares

C.A.2: $|x^4 + y^4| = x^4 + y^4 \geq y^4$

Si $y = 0$: $f(x,0) = \dfrac{\cos(x) \cdot x \cdot 0}{e^{x+y} \cdot x^4} = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$|y|^4 = y^4$

$$\leq \frac{|x|\, \cancel{|y|^4}}{\cancel{y^4}} \leq \|(x,y)\| < \delta < \varepsilon$$

∴ Al como contomar $\delta < \varepsilon$ para que se cumpla lo pedido $\Rightarrow$ El límite es 0 $\Rightarrow$ f es continua en (0,0)

- $a = 1$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x) \cdot x \cdot y^4 + \sin(x^4)}{e^{x+y}\, x^4 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Para que f sea continua en (0,0): $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

Tomo $f(x,x) = \dfrac{\cos(x)\cdot x^5 + \sin(x^4)}{e^{2x}x^6 + x^4} =$

$= \dfrac{\cancel{x^4}\Big(\overbrace{\cos(x)\cdot x}^{0 \text{ (0 x Acotado)}} + \underbrace{\Big(\frac{\sin(x^4)}{x^4}\Big)}_{\to 1}\Big)}{\cancel{x^4}(\underbrace{e^{2x}x^2}_{\to 0} + 1)} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

Es decir si el límite de $f(x,y)$ con $(x,y) \to (0,0)$ existe, tendría que ser 1 y $1 \neq 0 \Longrightarrow$ f no es continua en $(0,0)$

4) • $g(0,0) = 4$

$\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial^2 x}(0,0) = 6$

$\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 1$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial^2 y}(0,0) = 0$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$

• Como f es de clase C^2

$\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,2) = \langle \nabla f(0,2), v \rangle =$

$= \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,2)\cdot \underset{\frac{3}{5}}{v_1} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,2)\cdot \underset{\frac{4}{5}}{v_2}$

• Como $h(x,y) = (\overbrace{y+x^2}^{h_1}, \overbrace{2+\sin(x^3+y)}^{h_2})$

$g(x,y) = f(h(x,y))$

• $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(h(0,0))\cdot\dfrac{\partial h_1}{\partial y}(0,0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(h(0,0))\cdot\dfrac{\partial h_2}{\partial y}(0,0)$

NOTA

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ es diferenciable en $(0,0)$ si:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0)\cdot x - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\cdot y \right|}{\|(x,y)\|} = 0$$

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(7x^6y^4)(x^6+y^4) - (x^7y^4)\cdot(6x^5)}{(x^6+y^4)^2} =$$

$$= \frac{7x^{12}y^4 + 7x^6y^8 - 6x^{12}y^4}{(x^6+y^4)^2} = \frac{x^{12}y^4 + 7x^6y^8}{(x^6+y^4)^2}$$

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^6+0} - 0}{h} = 0$$

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^{12}\cdot 0 + 7h^6\cdot 0 - 0}{(h^6+0)\,h} = 0$$

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = 0$$

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{12}y^4 + 7x^6y^8}{(x^6+y^4)^2\,\|(x,y)\|} = 0$$ si $\forall \varepsilon > 0,$

$$\exists \delta > 0 \,/\, 0 < \|(x,y)\| < \delta \implies \left| \frac{x^{12}y^4 + 7x^6y^8}{(x^6+y^4)^2\sqrt{x^2+y^2}} \right| < \varepsilon$$

NOTA

$$\left|\frac{x^{12}y^4+7x^6y^8}{(x^6+y^4)^2\sqrt{x^2+y^2}}\right| \underset{(C.A.1)}{\leq} \frac{x^{12}y^4+7x^6y^8}{(x^6+y^4)^2\sqrt{x^6+y^4}} \leq \cdots$$

C.A.1 Si $\delta < 1 \to |x| < \|(x,y)\| < \delta < 1 \Rightarrow |x| < 1$

y si $|x| < 1 \Rightarrow \underbrace{x^2 > x^6 \text{ e } y^2 > y^4}$

$$x^2+y^2 > x^6+y^4 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} > \sqrt{x^6+y^4}$$

$$\leq \frac{x^{12}y^4+7x^6y^8}{(x^6+y^4)^{5/2}} \leq$$

$$\frac{x^6y^4(x^6+7y^4)}{(x^6+y^4)^2\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{7x^6y^4}{x^6+y^4}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{7x^6}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= 7|x|^5 \cdot \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 7|x|^5 < 7\|(x,y)\|^5 \leq 7\delta^5 < \varepsilon$$

$$\delta < \sqrt[5]{\varepsilon/7}$$