NOMBRE Y NRO. LIBRETA:

1	2	3	4	5	Calif.

Álgebra I

Simulacro del segundo parcial - 31 de julio de 2020

Este parcial es optativo y no condiciona la nota de la materia. Aproveche esta instancia para trabajar tranquilo e intente dar lo mejor de sí. Esta oportunidad sirve para seguir conociendo su ritmo de trabajo y desarrollar el método que le sea más cómodo. Una idea es empezar por el ejercicio que considere más fácil.

1. Hallar todos los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ que satisfagan el sistema

$$\begin{cases} 51a + 15b = 9, \\ 2a \equiv b\,(21), \\ 5a \equiv b\,(9). \end{cases}$$

2. Hallar todos los primos positivos p tales que $p \mid 49^{p^2-1} + 8^p + 6^{p^2+1}$.

3. Dado $n \in \mathbb{N}$ calcular el resto de dividir a n por 8 sabiendo que $(1-i)^{3n+3}$ es un número real positivo.

4. Sea $w \in G_{35}$ una raíz primitiva. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $\overline{w}^{15} \in G_{2n+3}$ y

$$\sum_{j=0}^{3n+1} w^{7j} = 0.$$

5. Factorizar en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ al polinomio

$$X^6 + 2X^5 - 4X^4 + 13X^2 - 10X + 2$$

sabiendo que $\sqrt{2} - 1$ es una raíz múltiple.

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

Resoluciones

1. Tenemos que
$$51a + 15b = 9 \leftrightsquigarrow 17a + 5b = 3$$
y como
$$3 = 3 \cdot 1 = 3(35 - 34) = 3(7 \cdot 5 - 2 \cdot 17) = 21 \cdot 5 - 6 \cdot 17$$
tenemos una solución particular. Por la teoría y dado que 5 y 17 son coprimos todas las soluciones son
$$\left\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : a = -6 + 5k,\ b = 21 - 17k;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$
Pero ¿cuáles cumplen las ecuaciones? Tenemos el sistema[1]
$$\begin{cases} 2a \equiv b\,(21), \\ 5a \equiv b\,(9), \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2(-6+5k) \equiv 21 - 17k\,(21), \\ 5(-6+5k) \equiv 21 - 17k\,(9), \end{cases}$$
$$\leftrightarrow \begin{cases} 6k \equiv 12\,(21), \\ 6k \equiv 6\,(9), \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2k \equiv 4\,(7), \\ 2k \equiv 2\,(3), \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} k \equiv 2\,(7), \\ k \equiv 1\,(3). \end{cases}$$
Por el teorema chino del resto resulta que
$$k = 16 + 21l$$
con $l \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto la respuesta es
$$\left\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : a = -6 + 5(16 + 21l),\ b = 21 - 17(16 + 21l);\ l \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. Necesitamos que
$$49^{p^2-1} + 8^p + 6^{p^2+1} \equiv 0\,(p).$$
Sabemos que $a^p \equiv a\,(p)$ por el p. t. de Fermat. Si $p = 7$ tenemos que
$$\begin{aligned} 49^{p^2-1} + 8^p + 6^{p^2+1} &\equiv 0^{p^2-1} + 8 + (6^p)^p \cdot 6\,(7) \\ &\equiv 8 + 6^p \cdot 6\,(7) \\ &\equiv 8 + 36\,(7) \\ &\equiv 44\,(7) \end{aligned}$$
que no es equivalente a $0\,(7)$ por lo cual $p \neq 7$. Supongamos entonces que $p \neq 7$. Luego 49 es distinto de cero módulo p y $49^{p-1} \equiv 1\,(p)$ también por el p. t. de Fermat. Luego
$$\begin{aligned} 49^{p^2-1} + 8^p + 6^{p^2+1} &\equiv (49^{p-1})^{p+1} + 8 + (6^p)^p \cdot 6\,(p) \\ &\equiv 1^{p+1} + 8 + 36\,(p) \\ &\equiv 1 + 44\,(p) \\ &\equiv 45\,(p) \end{aligned}$$
y como $45 = 3^2 \cdot 5$ las soluciones son $p = 3$ o 5.

[1] Cuidado: la ecuación $6k \equiv 6\,(9)$ es equivalente a $2k \equiv 2\,(3)$ (que no es lo mismo que $k \equiv 1\,(9)$). ¿Pero por qué no podemos «tachar» el 6 a ambos lados? Porque no tiene inverso multiplicativo módulo 9 ya que 6 y 9 no son coprimos.

3. Sabemos que $1-i=\sqrt{2}e^{\frac{14\pi i}{8}}$. Luego

$$\left(\sqrt{2}e^{\frac{14\pi i}{8}}\right)^{3n+3}$$

es un número real positivo si y solo si

$$e^{\frac{7\pi i(3n+3)}{4}}$$

lo es. Para que esto suceda

$$\frac{7\pi i(3n+3)}{4}=2k\pi i$$

con $k\in\mathbb{Z}$. Luego tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{7\pi i(3n+3)}{4}&=2k\pi i\\
\leftrightarrow \frac{7(3n+3)}{4}&=2k\\
\leftrightarrow 7(3n+3)&=8k\\
\leftrightarrow 7(3n+3)&\equiv 0\,(8)\\
\leftrightarrow (3n+3)&\equiv 0\,(8) \text{ pues } 7\perp 8\\
\leftrightarrow 3n&\equiv 5\,(8)\\
\leftrightarrow n&\equiv 7\,(8)
\end{aligned}$$

y llegamos a que la respuesta es 7.

4. Tenemos que $w=e^{\frac{2k\pi i}{35}}$ con k coprimo con 35. Luego $w^7=e^{\frac{2k\pi i}{5}}$ con k coprimo con 5 que implica que w^7 está en G_5 y es raíz primitiva ($w\neq 1$). Luego

$$0=\sum_{j=0}^{3n+1} w^{7j}=\frac{(w^7)^{3n+2}-1}{w^7-1}$$

implica que $(w^7)^{3n+2}=1$, es decir, $3n+2\equiv 0\,(5)$. Además

$$\overline{w}^{15}=\left(e^{\frac{-2k\pi i}{35}}\right)^{15}=e^{\frac{-6k\pi i}{7}}=e^{\frac{8k\pi i}{7}}\in G_{2n+3}$$

nos lleva a que

$$\left(e^{\frac{8k\pi i}{7}}\right)^{2n+3}=1$$

entonces

$$8k(2n+3)\equiv 0\,(14)\leftrightarrow 4k(2n+3)\equiv 0\,(7)\leftrightarrow k(2n+3)\equiv 0\,(7)\leftrightarrow (2n+3)\equiv 0\,(7).$$

Y nos queda el sistema

$$\left\{\begin{array}{l}3n+2\equiv 0\,(5),\\ 2n+3\equiv 0\,(7),\end{array}\right.\leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}3n\equiv 3\,(5),\\ 2n\equiv 4\,(7),\end{array}\right.\leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}n\equiv 1\,(5),\\ n\equiv 2\,(7),\end{array}\right.$$

cuya solución, usando el t. chino del resto, da $n=16+35k$ con $k\in\mathbb{N}_0$.

5. Como $(\sqrt{2}-1)$ es raíz de un polinomio en $\mathbb{Z}$ resulta que $(-\sqrt{2}-1)$ también debe serlo. Luego
$$(X-\sqrt{2}+1)(X+\sqrt{2}+1) = X^2+2X-1.$$
Al ser raíz múltiple resulta que
$$(X^2+2X-1)^2 = X^4+4X^3+2X^2-4X+1$$
debe dividir al polinomio. Si hacemos esta división nos queda
$$X^6+2X^5-4X^4+13X^2-10X+2 = (X^2+2X-1)^2(X^2-2X+2)$$
y como
$$X^2-2X+2 = (X-1-i)(X-1+i)$$
nos queda factorizado
$$\begin{cases} (X-\sqrt{2}+1)^2(X+\sqrt{2}+1)^2(X-1-i)(X-1+i) & \text{en } \mathbb{C}[X], \\ (X-\sqrt{2}+1)^2(X+\sqrt{2}+1)^2(X^2-2X+2) & \text{en } \mathbb{R}[X], \\ (X^2+2X-1)^2(X^2-2X+2) & \text{en } \mathbb{Q}[X]. \end{cases}$$