1	2	3	4	Calificación
25	22	25	25	97

A

TEMA 1

Probabilidad y Estadística (C)

Primer parcial - 11/10/2022

Complete esta hoja y entréguela con el resto del examen. ***Realizar cada ejercicio en hoja separada.*** *Escribir el nombre en cada una. Al retirarse debe firmar una hoja de asistencia.*

APELLIDO Y NOMBRES: Cupciati Dante .... Nº DE LIBRETA: 351/22

mail: mellidante .... @ gmail.com .... FIRMA: ....

Turno: Mañana: 11 a 14 hs | Noche: 19 a 22 hs | Nº de hojas entregadas (sin enunciado): 10

Criterio de aprobación: Para aprobar este examen es necesario sumar al menos 60 puntos y tener un ejercicio bien resuelto.

Definir con palabras los eventos y/o las variables aleatorias involucradas, nombres y parámetros de las distribuciones. ***Resolver usando al menos 4 decimales todos los pasos intermedios y entregar la respuesta redondeada en el cuarto decimal. Justifique claramente sus afirmaciones.***

---

1. (25 puntos)
   (a) (7 puntos) Sean A y B dos eventos con $P(A) = 0.37$, $P(B|A) = 0.07$ y $P(A \cup B) = 0.56$. Calcular $P(B)$. ¿Son A y B independientes? Justificar adecuadamente.
   (b) (8 puntos) Sean A y B dos eventos con $P(A|B) = P(B|A) = 0.2$ y $P(A \cup B) = 0.72$. Calcular $P(A)$.
   (c) (10 puntos) En la próxima definición por penales que realice la selección Argentina patearán los jugadores: Messi, Martínez, Di María, Otamendi y Palacios. Históricamente sus aciertos son respectivamente del 95%, 90%, 95%, 85%, 80%. En los primeros 5 tiros al arco (cada uno patea una vez solamente), calcular la probabilidad de que al menos dos de ellos no logren meter el gol. Suponer independencia entre los resultados de los distintos penales.

2. (25 puntos) En la provincia de La Pampa hay una gran población de tortugas. El 55% de las tortugas son hembras y el resto machos. La longitud (en centímetros) de una tortuga hembra se modela con una variable aleatoria Y con distribución exponencial de parámetro $\lambda = 0.1$ y la longitud (en centímetros) de ña tortuga macho se modela con la variable aleatoria continua X con función de distribución acumulada dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 10 \\ 3 - \dfrac{30}{x} & \text{si } 10 \leq x \leq 15 \\ 1 & \text{si } x > 15 \end{cases}$$

   (a) (7 puntos) Se elige al azar una tortuga, ¿cuál es la probabilidad de que mida entre 11 y 13 cm?
   (b) (5 puntos) Se elige al azar una tortuga que mide entre 11 y 13 cm, ¿cuál es la probabilidad de que sea macho?
   (c) (5 puntos) Se eligen al azar (con reposición) tortugas hasta obtener la quinta hembra, ¿cuál es la probabilidad de que esto se logre en la octava extracción?
   (d) (8 puntos) Hallar la esperanza de $\frac{3}{X}$.

3. (25 puntos) Un juego consiste en tirar una moneda equilibrada 4 veces, siendo X la cantidad de caras obtenidas, y tirar luego tantos dados como caras se hubieran obtenido en el paso anterior. Sea Y la variable aleatoria que cuenta la cantidad de unos obtenidos.

   (a) (7 puntos) ¿Cuál es la función de probabilidad de Y condicional a que se sabe que se tiraron 3 dados?

   (b) (14 puntos) Dar el rango del vector (X, Y), hallar la función de probabilidad marginal de X y la función de probabilidad conjunta. Calcular $P(Y = 3)$.

   (c) (4 puntos) ¿Son X e Y independientes? Justificar analíticamente.

4. (25 puntos) El tiempo de duración de un experimento (en minutos) está dado por una variable aleatoria $T = 34 - 6X$, siendo $X \sim U[-2, 3]$.

   (a) (6 puntos) ¿De cuánto tiempo debe disponer la persona que va a realizar el experimento si quiere tener probabilidad al menos 0.7 de que le alcance?

   (b) (6 puntos) Se realizan tres experimentos independientes. Calcular la probabilidad de que alguno dure menos de 20 minutos.

   (c) (6 puntos) Hallar la esperanza y la varianza de T.

   (d) (7 puntos) Se realizan 40 experimentos independientes que medimos a través de variables aleatorias $T_1, \ldots, T_{40}$. Calcular la esperanza y varianza del tiempo total de duración de estos 40 experimentos.

DANTE CULACIATI	DNI: 45.428.870 LU: 351/22	TM TEMA 1	HOJA N° 1 FECHA 11/10/22

1) a) Tengo dos eventos A y B, con:

- $P(A) = 0,37$
- $P(A \cup B) = 0,56$
- $P(B|A) = 0,07$

Quiero calcular $P(B)$. Además, quiero saber si A y B son independientes.

Antes de comenzar, recordemos que, para dos eventos A y B cualquiera, por definición:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (Por el principio de inclusión-exclusión)

(Se lee como "A o B")

- $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$ (Por el teorema de Bayes)

(Se lee como "B dado A")

- A y B son independientes $\iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

(Se lee como "A y B")

- $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$

Una vez que sabemos esto, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - [P(B|A) \cdot P(A)]$$

Reemplazando los valores que ya conocemos, nos queda

$$0,56 = 0,37 + P(B) - [0,07 \cdot 0,37]$$

$$\iff 0,56 = 0,37 + P(B) - 0,0259$$

NOTA

(Sigue a la vuelta)

$\Longrightarrow 0{,}56 = 0{,}3441 + P(B)$

$\Longrightarrow \boxed{P(B) = 0{,}2159}$

Para ver si A y B son independientes, basta con ver si vale la siguiente igualdad

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

$$\Longleftrightarrow \quad P(B|A) \cdot P(A) = P(A) \cdot P(B)$$

(Divido ambos lados por P(A), pues P(A) > 0 ⇒ P(A) ≠ 0)

$$\Longleftrightarrow \quad P(B|A) = P(B)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0{,}07 = 0{,}2159$$ (No vale esta igualdad)

Por lo tanto, A y B <u>No</u> son independientes.

b) Tengo dos eventos A y B con:

- $P(A|B) = P(B|A) = 0{,}2$
- $P(A \cup B) = 0{,}72$

Quiero calcular P(A).

Tomando en cuenta las definiciones antes mencionadas planteo las siguientes ecuaciones

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\Longrightarrow P(A|B)\,P(B) = P(A \cap B) \qquad \Longrightarrow P(B|A) \cdot P(A) = P(A \cap B)$$

(Juntando ambas ecuaciones)

$$\Longleftrightarrow \quad P(A|B)\,P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

(Sigue en hoja 2)

NOTA

DANTE CUCACIATI	DNI: 45.428.879 LU: 351/22	TM TEMA 1	HOJA N° ~~7~~2 FECHA 11/10/22

Pero, según el enunciado, $P(A|B) = P(B|A)$. Entonces,

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{P(B) = P(A)}$$

Además, observo que, como $P(A \cap B) =$ ~~[illegible]~~ $P(B|A) \cdot P(A)$, y $P(B|A) = 0,2$,

entonces, $P(A \cap B) = (0,2) \cdot P(A)$

Finalmente, planteo la siguiente ecuación:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 2\,P(A) - [0,2\,P(A)]$$

$$\Leftrightarrow \quad P(A \cup B) = 1,8\,P(A)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0,72 = 1,8\,P(A)$$

(Reemplazo $P(A \cup B)$ por $0,72$)

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{P(A) = 0,4}$$

c) Tengo los jugadores de la selección Argentina que patearán en la próxima ~~[illegible]~~ definición por penales, con su porcentaje de aciertos históricos:

(1). Messi: 95%   (3). Di María: 95%   (5). Palacios: 80%

(2). Martínez: 90%   (4). Otamendi: 85%

Quiero calcular la probabilidad de que en los primeros 5 tiros al arco, pateando una vez cada uno de ellos, al menos dos no logren meter gol, suponiendo independencia entre los resultados de los distintos penales.

(sigue a la vuelta)

NOTA

DISCRETA

Llamo X a la variable aleatoria que cuenta la cantidad de penales errados. Por definición, $Pr(X \geq k) = 1 - Pr(X < k)$. Por lo tanto, la probabilidad de que dos o más jugadores no hagan un gol es:

$$Pr(X \geq 2) = 1 - Pr(X < 2) = 1 - \underbrace{[Pr(X=0) + Pr(X=1)]}$$

Esto se debe a que X es una v.a. discreta, con rango en $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, ya que de 5 penales, puedo errar 0, 1, 2, 3, 4 o 5 de ellos. Por lo tanto, la probabilidad de ERRAR menos de dos penales es la probabilidad de no errar ninguno, más la probabilidad de sólo errar 1.

(Además, por definición, $Pr(X < k) = \sum_{i=0}^{k-1} Pr(X = i)$, para v.a. discretas)

(En este caso, i arranca en 0, pero en realidad podría arrancar desde cualquier entero)

Quiero calcular $Pr(X=1)$ y $Pr(X=0)$, es decir, la probabilidad de errar 0 penales, y la probabilidad de errar 1 sólo penal.

. La probabilidad de errar 0 penales es la probabilidad de que todos metan los penales. Como los resultados son independientes, llamando P_i a el evento: "El jugador i metió su penal"

$$Pr(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4 \cap P_5) = Pr(P_1) \cdot Pr(P_2) \cdot Pr(P_3) \cdot Pr(P_4) \cdot Pr(P_5)$$

$$= 0,95 \cdot 0,9 \cdot 0,95 \cdot 0,85 \cdot 0,8$$

$$= 0,55233 = Pr(X=0)$$

(Sigue en hoja 3)

NOTA

Dante Culaciati | DNI: 45.428.870 | LU: 351/22 | TM | TEMA 1 | HOJA Nº 3 | FECHA 11/10/22

. La probabilidad de errar 1 sólo penal es la suma de todos los casos posibles en donde sólo un jugador erra un penal. Puesto en símbolos, tenemos:

$$Pr(X=1) = Pr(P_1^c \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4 \cap P_5) + Pr(P_1 \cap P_2^c \cap P_3 \cap P_4 \cap P_5)$$
$$+ Pr(P_1 \cap P_2 \cap P_3^c \cap P_4 \cap P_5) + Pr(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4^c \cap P_5)$$
$$+ Pr(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4 \cap P_5^c) \quad ⊛$$

Llamando E_i a el evento donde sólo el jugador i erró el penal, tenemos

$$Pr(X=1) = \sum_{i=1}^{5} E_i = 0{,}02907 + 0{,}06137 + 0{,}02907 + 0{,}09747$$
$$+ 0{,}1380825 = 0{,}3550625$$

Por lo tanto, ~~[illegible]~~

$$Pr(X \geq 2) = 1 - Pr(X<2) = 1 - [Pr(X=0) + Pr(X=1)]$$
$$= 1 - [0{,}55233 + 0{,}3550625]$$
$$= 0{,}0926075 \approx \boxed{0{,}0926}$$

(Ejercicio 2) en hoja 4)

⊛ (vale la pena aclarar que, debido a la independencia entre los eventos puedo "separar" estas probabilidades en productos individuales, los cuales luego fueron calculados utilizando la calculadora).

NOTA

DANTE CULACIATI | DNI: 45.428.870 | (22) TM | HOJA N° 1
LU: 351/22 | 7 | 5 | 5 | 5 | TEMA 1 | FECHA 11/10/22

2) Tengo los siguientes datos:

. En la Provincia de La Pampa, el 55 % de las tortugas son hembras, y el resto (45%), son machos.

. La longitud (en centímetros) de una tortuga hembra se modela con una v.a. $Y \sim Exp(0,1)$ (Exp(λ) es la distribución exponencial, también notada como $\mathcal{E}(\lambda)$)

. La longitud (en centímetros) de la tortuga macho se modela con una v.a. continua X, con una función de distribución acumulada dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 10 \\ 3 - \frac{30}{x} & \text{si } 10 \leq x \leq 15 \\ 1 & \text{si } x > 15 \end{cases}$$

a) Quiero calcular la probabilidad de que una tortuga elegida al azar, mida entre 11 y 13 cm.

Podemos considerar dos casos, siendo el primero el caso donde la tortuga elegida es <u>hembra</u> (con un <u>55 %</u> de probabilidad, ya que esa es la proporción de tortugas hembras que hay para elegir), y el segundo caso donde la tortuga elegida es <u>macho</u> (con un 45 % de probabilidad, por el mismo razonamiento que antes).

En ~~caso~~ ambos casos, la probabilidad de que la tortuga mida entre 11 y 13 cm es:

$$P_r(11 \leq K \leq 13) = F_K(13) - F_K(11)$$ (donde $K \in \{X, Y\}$, y $F_K(k)$ es la F.D.A. de K)

NOTA (Sigue a la vuelta)

a. Caso 1

$Y \sim Exp(0,1) \Rightarrow F_Y(y) = 1 - e^{-(0,1)\cdot y}$ (calculadora)

$\therefore F_Y(13) - F_Y(11) = \left[1 - e^{-(0,1)\cdot 13}\right] - \left[1 - e^{-(0,1)\cdot 11}\right] \simeq 0,0603$

(calculadora)

Caso 2

$F_X(13) - F_X(11) = \left(3 - \frac{30}{13}\right) - \left(3 - \frac{30}{11}\right) \simeq 0,4196$

Juntando ambos casos, con sus respectivas probabilidades, tengo que la probabilidad de que una tortuga elegida al azar mida entre 11 y 13 cm es:

$P(H) \cdot P(11 \leq Y \leq 13) + P(M) \cdot P(11 \leq X \leq 13) =$

$= (0,55) \cdot (0,0603) + (0,45) \cdot (0,4196) \simeq \boxed{0,2220}$

b) Quiero calcular la probabilidad de que una tortuga sea macho, dado que mide entre 11 y 13 cm.

Llamando $\underline{A}$ al evento: "la tortuga es macho" y $\underline{B}$ al evento: "la tortuga mide entre 11 y 13 cm", y (tomando en cuenta las definiciones mencionadas en el ejercicio 1) ⊕ (Aclaración al final del ejercicio)

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{(0,4196) \cdot (0,45)}{(0,2229)} \simeq \boxed{0,8505}$$

(Reemplazo todo, pues ya conozco todas esas probabilidades por el ejercicio anterior)

(Sigue en hoja 5)

Dante Culaciati | DNI: 45.423.870 LU: 351/22 | TM TEMA 1 | HOJA N° 5 FECHA 11/10/22

c) Quiero calcular la probabilidad de que, al elegir tortugas al azar (con reposición) hasta obtener la quinta hembra, logre esto en la octava extracción.

Para resolver este problema, podemos considerar una v.a. X, tal que

X = "Cantidad de extracciones antes de obtener 5 hembras".

(Extraer con reposición implica que cada extracción es independiente de las demás)

Debido a que estamos extrayendo con reposición, y que la probabilidad de extraer una hembra no solo es constante (0,55), sino que también este evento o ocurre o no ocurre (es decir, es un ensayo de Bernoulli), podemos modelar la distribución de X con la distribución Binomial Negativa, es decir

$$X \sim BN(\underbrace{5}_{\text{Cant. de éxitos "necesarios"}}, \underbrace{0{,}55}_{\text{Probabilidad de éxito en cada ensayo}})$$

por lo tanto

$$\Pr(X=8) = p_X(8) = \binom{8-1}{5-1}(0{,}55)^5 \cdot (0{,}45)^{8-5}$$

$$= \binom{7}{4}(0{,}55)^5 (0{,}45)^3 \approx \boxed{0{,}1605}$$

Esta fórmula se puede pensar así: de 8 intentos, 5 deben ser éxitos $((0{,}55)^5)$, y 3 deben ser fallos $((0{,}45)^3)$. Como al obtener el 5to éxito me detengo, ese éxito ya tiene una pos. fija. El resto de éxitos

NOTA

(Sigue a la vuelta)

(los puedo "ubicar" de $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ maneras, lo que determina la ubicación de los fallos)

d) Quiero hallar la esperanza de $\frac{3}{x}$.

~~[illegible]~~

Para resolver esto, puedo considerar una función $g(X) = \frac{3}{X}$.

Por la "ley del estadístico inconsciente" (lo cual NO es un axioma, sino algo que se debe probar, de ahí su nombre)

$$\boxed{E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx} \quad \text{(para v.a. continuas)}$$

Por lo tanto, en este caso

$$E\left(\frac{3}{X}\right) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{x} f_X(x)\, dx$$

Antes de continuar, debo hallar $f_X(x)$.

Por definición, $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$

(Función de densidad de probabilidad de X)

Por lo tanto, para hallar $f_X(x)$, derivo $F_X(x)$ (teniendo cuidado con las distintas definiciones de $F_X(x)$, según en qué intervalo del soporte esté x).

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx}(0) & \text{si } x < 10 \\ \frac{d}{dx}\left(3 - \frac{30}{x}\right) & \text{si } 10 \leq x \leq 15 \\ \frac{d}{dx}(1) & \text{si } x > 15 \end{cases}$$

NOTA

(Sigue en hoja 6)

DANTE CULACIATI | DNI: 45 128 877 | HOJA N° 6
LU: 351/22 | FECHA 11/10/22

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 10 \\ \frac{30}{x^2} & \text{si } 10 \leq x \leq 15 \\ 0 & \text{si } x > 15 \end{cases} = \begin{cases} \frac{30}{x^2} & \text{si } 10 \leq x \leq 15 \\ 0 & \text{sino } (x < 10 \lor x > 15) \end{cases}$$

Finalmente, calculo $E\left(\frac{3}{x}\right)$

$$E\left(\frac{3}{x}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{x} f_X(x)\, dx = \int_{10}^{15} \frac{3}{x} \cdot \frac{30}{x^2}\, dx = 90 \int_{10}^{15} \frac{1}{x^3}\, dx$$

no

mal la primitiva

$$= 90 \cdot \left[\frac{-3}{x^4} \right]_{10}^{15} = 90 \cdot \left(-\frac{3}{15^4} + \frac{3}{10^4} \right) \approx \boxed{0,0217}$$

(Ejercicio 3) en hoja 7)

Lo único que utilizo de estas definiciones es que

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad \text{(por el Teorema de Bayes)}$$

$$\int \frac{1}{x^3}\, dx = -\frac{1}{2x^2} + C$$

NOTA

DANTE CULACIATI DNI: 45.428.879 LU: 351/22 · 25 TM TEMA 1 HOJA Nº 7 FECHA ~~[illegible]~~ 11/1/22

3) Tengo un juego que consiste en tirar una moneda equilibrada 4 veces, siendo X la ~~[illegible]~~ cant. de caras obtenidas, y luego tirar tantos dados como las caras que obtuve.

Tengo Y, una v.a. que cuenta la cantidad de unos obtenidos.

Antes de comenzar, observemos que ~~[illegible]~~ (asumiendo que los tiros de moneda son independientes), podemos modelar la distribución de X con la ~~[illegible]~~ distribución Binomial (pues cada ensayo es independiente de los demás, y la probabilidad de éxito es constante, y el experimento sólo puede tener como resultado "cara" o "cruz"). Es decir,

$$X \sim Binom(4, 0{,}5)$$

(cant. de ensayos) (probabilidad de éxito en cada ensayo).

~~[illegible]~~ Además, como Y depende del valor de X, y la probabilidad de sacar un uno en un dado es constante $\left(\frac{1}{6}\right)$, y ~~[illegible]~~ (asumiendo que los tirados son independientes), puedo decir que

$$P_{Y|X=x} \sim Binom\left(x, \frac{1}{6}\right)$$ (Prob. condicional de Y dado X)

a) Sabiendo que se tiraron 3 dados, quiero saber la función de prob. condicional de Y.

~~[illegible]~~

Esto lo podemos deducir de lo ya mencionado:

(Sigue a la vuelta)

NOTA

$p_{Y|X=3} \sim \text{Binom}\left(3, \frac{1}{6}\right)$

$$\therefore \boxed{p_{Y|X=3}(y) = \binom{3}{y}\left(\frac{1}{6}\right)^{y} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{3-y}}$$

b) Quiero dar el rango del vector (X,Y). Cabe destacar que el rango de un vector, en este caso, son los valores a los cuales tiene sentido asignarles una probabilidad (formalmente, $R_{XY} = \{(x,y) : p_X(x) > 0, p_Y(y) > 0\}$)

$\in \Omega$ (ESPACIO MUESTRAL)

Podemos ver fácilmente que X puede ~~tomar valores~~ tomar valores enteros entre 0 y 4, mientras que Y puede tomar valores entre 0 y X. Por lo tanto:

$$\boxed{\underbrace{R_{XY}}_{\text{(Rango de }(X,Y))} = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq x,\ x, y \in \mathbb{N}_0\}}$$

Quiero hallar la función de probabilidad marginal de X. Como ya vimos, $X \sim \text{Binom}(4, 0{,}5)$. Por lo tanto

$$\boxed{p_X(x) = \binom{4}{x}(0{,}5)^{x}(0{,}5)^{4-x} = \binom{4}{x}(0{,}5)^{4}}$$

Quiero hallar la función de probabilidad conjunta. Por definición:

$$p_{Y|X=x} = \frac{p_{XY}}{p_X}$$

Reemplazando los valores que ya conozco:

(Sigue en hoja 8)

NOTA

DANTE CULACIATI | DNI: 45.428.379 LU: 351/22 | TM TEMA 1 | HOJA Nº 8 FECHA 11/10/22

$$\binom{x}{y}\left(\frac{1}{6}\right)^{y}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-y} = \frac{p_{XY}}{\binom{4}{x}(0,5)^4}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left[\binom{x}{y}\left(\frac{1}{6}\right)^{y}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-y}\right]\cdot\left[\binom{4}{x}(0,5)^4\right] = p_{XY}(x,y)}$$

OK

Quiero calcular $P(Y=3)$.

Observo que $P(Y=3) = P(Y=3|X=0)P(X=0) + P(Y=3|X=1)P(X=1) + \dots + P(Y=3|X=4)P(X=4)$;

(Esto se debe a que todos los $X=x$ forman una partición del espacio muestral de X, y por la ley de probabilidad total puedo sacar la probabilidad de $Y=3$)

Es decir,

$$P(Y=3) = \sum_{i=0}^{4} P(Y=3|X=i)\cdot P(X=i)$$

~~Calc~~

- $P(Y=3|X=0) = 0$
- $P(Y=3|X=1) = 0$
- $P(Y=3|X=2) = 0$
- $P(Y=3|X=3) = \frac{1}{216}$
- $P(Y=3|X=4) = \frac{5}{324}$

- $P(X=0) =$
- $P(X=1) =$
- $P(X=2) =$
- $P(X=3) = 0,25$
- $P(X=4) = 0,0625$

No ~~me~~ ME INTERESAN, PUES SE CANCELAN

Entonces, $P(Y=3) = \frac{1}{216}\cdot 0,25 + \frac{5}{324}\cdot 0,0625 \simeq \boxed{0,0021}$

(Sigue a la vuelta)

NOTA

c) Si X e Y fueran independientes entonces, (entre otras cosas)

$$p_{Y|X=x}(y) = p_Y(y) \quad \forall (x,y) \in R_{XY}$$

Sin embargo, como vimos en el punto anterior:

$$p_Y(3) \approx 0,0021 \quad y \quad p_{Y|X=3}(3) = \frac{1}{216} = 0,0046$$

$$p_Y(3) = 0,0021 \neq 0,0046 = p_{Y|X=3}(3)$$

$\boxed{\text{Por lo tanto, } X \text{ e } Y \text{ \underline{No} son independientes}}$

(Ejercicio 4) en hoja 9)

NOTA

DANTE CULACIATI | DNI: 45.120.879 LU: 351/22 | TM TEMA 1 | HOJA 25/ 9 FECHA 11/10/22

4) Tengo que el tiempo de duración de un experimento (en minutos) está dado por una v.a. $T = 34 - 6X$, siendo $X \sim U[-2, 3]$

a) Quiero calcular el tiempo del que debe disponer una persona si quiere completar el experimento a tiempo con prob. mayor o igual a 0,7.

En otras palabras, busco un t tal que

$$Pr(T \leq t) \geq 0,7$$

~~$Pr(T \leq t) = 34 - 6 F_X(t) = 34 - 6 \frac{t+2}{5}$~~

~~Reemplazo, y despejo t.~~

~~$34 - 6 \frac{t+2}{5} \geq 0,7$~~

~~$\iff \frac{6}{5}(t+2) \leq 33,3$~~

~~$\iff t+2 \leq 27,75$~~

$$Pr(T \leq t) = Pr(34 - 6X \leq t) = Pr(-6X \leq t - 34) = Pr\left(X \geq \frac{34-t}{6}\right)$$

$$= 1 - Pr\left(X < \frac{34-t}{6}\right) = 1 - F_X\left(\frac{34-t}{6}\right)$$

Planteo la ecuación

$$1 - F_X\left(\frac{34-t}{6}\right) \geq 0,7 \iff F_X\left(\frac{34-t}{6}\right) \leq 0,3$$

$$\iff \frac{34-t}{6} \leq F_X^{-1}(0,3)$$

(Sigue a la vuelta)

NOTA

$$\left(F_x(x) = \frac{x+2}{5} \Rightarrow F^{-1}(p) = 5x - 2 \right)$$

si $x \in [-2, 3]$

$$\iff \frac{34 - t}{6} \leq -\frac{1}{2}$$

$$\iff 34 - t \leq -3$$

$$\iff \boxed{t \geq 31}$$

Por lo tanto, la persona debe disponer de 31 o más segundos

b) Quiero calcular la probabilidad de que al realizar tres exp. indep., alguno dure más de 20 minutos.

Llamo X_1, X_2, X_3 a los exp.

Quiero calcular

$$Pr(X_1 < 20 \cup X_2 < 20 \cup X_3 < 20) = 1 - Pr(X_1 \geq 20 \cap X_2 \geq 20 \cap X_3 \geq 20)$$

$$= 1 - [Pr(X_1 \geq 20) \cdot Pr(X_2 \geq 20) \cdot Pr(X_3 \geq 20)] = 1 - Pr(X_1 \geq 20)^3$$

(Independencia de los experimentos)

(Sigue en hoja 10)

NOTA

Dante Cucaciati | DNI: 45.428.870 | Lu: 351/22 | TM TEMA 1 | HOJA N° 10 | FECHA 11/10/22

~~Planteo~~

(Ejercicio a)

$Pr(X_1 \geq 20) = 1 - Pr(X_1 < 20) = 1 - \left[1 - F_X\left(\frac{34-20}{6}\right)\right] \cdot$

Por lo tanto

$Pr(X_1 < 20 \cup X_2 < 20 \cup X_3 < 20) = 1 - \left[1 - \left(1 - F_X\left(\underbrace{\frac{34-20}{6}}_{=\frac{7}{3}}\right)\right)\right]^3$

$= 1 - \left[1 - \left(1 - \frac{13}{15}\right)\right]^3$

$= 1 - \left(\frac{13}{15}\right)^3 \approx \boxed{0,3490}$ ✓

b) quiero hallar $E(T)$ y $V(T)$

$\cdot\ E(T) = E(34 - 6X) = 34 - 6E(X) = 34 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{31}$

$\left(E(X) = \frac{3 + (-2)}{2} = \frac{1}{2}\right)$ ✓

$\cdot\ V(T) = V(34 - 6X) = (-6)^2 \cdot V(X) = 36 \cdot \frac{25}{12} = \boxed{75}$

$\left(\begin{array}{l} \cdot V(X + c) = V(X) \\ \cdot V(aX) = a^2 V(X) \end{array}\right) \forall a, c \in \mathbb{R}$

$\left(V(X) = \frac{(3 - (-2))^2}{12}\right) = \frac{25}{12}$

NOTA

(Sigue a la vuelta)

a) Se realizan 40 experimentos indep. medidos con v.a. $T_1, \ldots, T_{40}$.

Quiero calcular $E\left(\sum_{i=1}^{40} T_i\right)$ y $V\left(\sum_{i=1}^{40} T_i\right)$

- $E\left(\sum_{i=1}^{40} T_i\right) = \sum_{i=1}^{40} E(T_i) = 40 \cdot E(T) = 40 \cdot 31 = \boxed{1240}$

$(E(X+Y) = E(X) + E(Y) \ \forall X, Y \text{ v.a.})$

(Son todos el mismo experimento).

- $V\left(\sum_{i=1}^{40} T_i\right) = \sum_{i=1}^{40} V(T_i) = 40 \cdot V(T) = 40 \cdot 75 = \boxed{3000}$

(Esto es porque son independientes los experimentos)

NOTA