Turno Práctica: ☒ Mañana ☐ Tarde ☐ Noche

Álgebra I - 2do. Cuatrimestre de 2014
Recuperatorio del primer parcial
11/12/2014

1. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 20\}$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}(X)$ por

$$A\mathcal{R}B \iff A - B = A \triangle B.$$

a) Decidir si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, transitiva o antisimétrica.

b) Sea $B = \{1, 2, 3\}$. ¿Cuántos conjuntos $A \in \mathcal{P}(X)$ verifican que $A\mathcal{R}B$?

2. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que verifica $f(1) = 2$ y $f \circ f(n) = f(n) + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Probar por inducción que $f(n) = n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

3. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 21, \quad a_2 = 45, \quad a_3 = 54, \quad a_{n+3} = 12a_{n+2} - 77a_n^5 \quad (n \geq 1).$$

Probar por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que 3^n divide a a_n y 3^{n+1} no divide a a_n.

4. Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a^3 + 21 : 20) = 2$. Probar que $40 \mid a(a-1)(a^2+1)$.

5. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $7|n$, $(n : 270) = 18$ y n tiene 18 divisores positivos.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

① $X = \{1 \dots 20\}$

$ARB \Leftrightarrow A - B = A \Delta B$

a) REFLEXIVA: ¿$ARA \ \forall A \in P(X)$?

$ARA \Leftrightarrow \underbrace{A - A}_{\emptyset} = \underbrace{A \Delta A}_{\emptyset} \Rightarrow$ R es reflexiva

SIMÉTRICA: ¿$ARB \Rightarrow BRA \ \forall A, B \in P(X)$?

$ARB \Leftrightarrow A - B = A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \Leftrightarrow B - A = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq A$

$BRA \Leftrightarrow B - A = B \Delta A = (B - A) \cup (A - B) \Leftrightarrow A - B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$

$\therefore$ ARB y BRA solamente si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$,

entonces R no es simétrica.

ANTISIMÉTRICA:

Por lo visto anteriormente, ARB y BRA $\Leftrightarrow A = B$, entonces

R es antisimétrica

TRANSITIVA: ¿$ARB, BRC \Leftrightarrow ARC$?

$$\left.\begin{array}{l} ARB \Leftrightarrow B \subseteq A \\ BRC \Leftrightarrow C \subseteq B \end{array}\right\} C \subsetneq A \rightarrow ARC$$

R es transitiva

b) $\left[\begin{array}{l} B = \{1, 2, 3\} \\ \#\{A \in P(X) \,/\, ARB\}? \end{array}\right.$

$ARB \Leftrightarrow B \subseteq A$, por lo tanto, para que A se relacione con B tiene que contener a $\{1, 2, 3\}$. Además, A puede estar formado por cualquiera de los otros 17 elementos de X

Respuesta: 2^{17} conjuntos verifican lo pedido

(3) $\begin{cases} a_1 = 21 \\ a_2 = 45 \\ a_3 = 54 \\ a_{n+3} = 12a_{n+2} - 77a_n^5 \\ \text{PROBAR: } 3^n \mid a_n \ y \ 3^{n+1} \nmid a_n \end{cases}$

$3^n \mid a_n : P(n)$

- $P(1): 3 \mid a_1 = 21 = 3.7$ ✓ $\Rightarrow$ P(1) es verdadera — FALTA P(2) P(3)
- P(K) verdadera $\forall \ 1 \leq k < n+2 \Rightarrow P(n+3)$ es verdadera

$$3^{n+3} \mid a_{n+3} = 12\underbrace{a_{n+2}} - \overset{7.11}{\overset{\shortparallel}{77}} . a_n^5$$

$3^{n+2} \mid a_{n+2}$ por mi hipotesis inductiva

$$3^{n+3} = 3.3^{n+2} \mid 4.3.a_{n+2} = 12a_{n+2}$$

Entonces, para que 3^{n+3} divida a a_{n+3}, tiene que dividir a $77a_n^5$. ✓

$3^n \mid a_n$ por H.I. $\Rightarrow (3^n)^5 \mid 77a_n^5$

$(3^n)^5 = 3^{5n} = 3^n.3^n.3^n.3^n.3^n$ y si eso divide a $a_n^5 \Rightarrow 3^{n+3} = 3^n.3.3.3$ tambien lo va a dividir.

$\Rightarrow$ P(n+3) es verdadera

↳ (a_n está formado por almenos 5n números 3 $\Rightarrow$ n+3 números 3 lo van a dividir)

"5 con n mínimo" "4 con n mín" ↓ 5n crece más rapidamente que n+3

Por el principio de inducción sé que $3^n \mid a_n$

$3^{n+1} \nmid a_n : P(n)$

- $P(1): 3^2 = 9 \nmid a_1 = 21 = 3.7$ ✓ $\Rightarrow$ P(1) es verdadera
- P(K) verdadero $\forall \ 1 \leq k < n+2 \Rightarrow P(n+3)$ es verdadera

$$3^{n+3+1} \nmid a_{n+3} = 12a_{n+2} - 77a_n^5$$

Por lo probado anteriormente $(3^n \mid a_n)$ sé que

NOTA

NO! $5n > n+4 \Leftrightarrow 4n > 4 \Leftrightarrow n > 1$ (Y TENÉS QUE DECIR QUE ACÁ $n \geq 1$. $2 \nmid 3$

= justificación que antes

$3^{5n} \nmid 77 a_n^5 \Rightarrow 3^{n+4}$ también no a dividir a $77 a_n^5$.
Entonces para que $3^{n+4} \mid a_{n+3}$, 3^{n+4} tiene que dividir a $12 a_{n+2}$. Por mi hipótesis inductiva
$3^{n+3} \nmid a_{n+2} \Rightarrow 3 \cdot 3^{n+3} \nmid 3 \cdot a_{n+2} \Rightarrow 3^{n+4} \nmid 12 a_{n+2}$

∴ $P(n+3)$ es verdadero

Por el principio de inducción $3^{n+1} \nmid a_n$ ✓ (que)

(4)
$$\left[\begin{array}{l} a \in \mathbb{Z} \qquad \underset{\shortparallel}{2^2 \cdot 5} \\ (a^3+21 : 20) = 2 \\ \text{PROBAR: } \underset{\underset{2^3 \cdot 5}{\shortparallel}}{40} \mid a(a-1)(a^2-1) \end{array}\right.$$

- $2 \mid a^3+21$
  - $4 \nmid a^3+21$
  - $5 \nmid a^3+21$

-

$r_2(a)$	0	1	~~2~~
$r_2(a^3)$	0	1	~~0~~
$r_2(a^3+21)$	1	0	~~1~~

NO PUEDE DAR RESTO 2

$\hookrightarrow a \equiv 1\ (2)$ ✓

-

$r_4(a)$	0	1	2	3
$r_4(a^3)$	0	1	0	3
$r_4(a^3+21)$	1	2	1	0

$\downarrow$ $a \equiv 1(4)$ ✓ $\hookrightarrow a \equiv \cancel{2(4)}$

$\cancel{a \equiv 0(4)}$ $\longrightarrow$ $\downarrow$ lo descarto porque $a \equiv 1(2)$

• $r_5(a)$ 0 1 2 3 4

$r_5(a^3)$ 0 1 3 2 4 /

$r_5(a^3+21)$ 1 2 4 3 0 /

sin tachar

$\Rightarrow \underline{a \equiv 0, \cancel{1}, 2 \text{ ó } 3\ (5)}$ /

• si $4 \nmid a^3+21 \Rightarrow 8 \nmid a^3+21$

$r_8(a)$ 0 1 2 3 4 5 6 7

$r_8(a^3)$ 0 1 0 3 0 5 0 7

$r_8(a^3+21)$ 5 6 5 0 1 2 5 5

no cumple $a \equiv 4(4)$

$\Rightarrow \underline{a \equiv \cancel{0}, 1, \cancel{2}, \cancel{4}, 5, \cancel{6} \text{ ó } 7\ (8)}$

↳ no cumplen $a \equiv 1\ (2)$

• $40 \mid a(a-1)(a^2-1)$

– $40 \nmid a \quad (a \equiv 1(2))$

– $40 \mid a-1 \Leftrightarrow 8 \mid a-1$ y $5 \mid a-1$

• $r_5(a)$ 0 1 2 3 4

$r_5(a-1)$ $\cancel{1}^{4}$ $\cancel{2}^{0}$ $\cancel{1}^{1}$ $\cancel{2}^{2}$ 3 $\Big\}\ 5 \nmid a-1$ ✗

• $r_8(a)$ 0 1 2 3 4 5 6 7

$r_8(a-1)$ $\cancel{1}^{7}$ $\cancel{2}^{0}$ $\cancel{3}^{1}$ $\cancel{4}^{2}$ $\cancel{5}^{3}$ $\cancel{6}^{4}$ $\cancel{7}^{5}$ $\cancel{0}^{6}$ $\Big\}\ 8 \mid a-1$ si $a \equiv 7(8)$ ✗

– $40 \mid a^2-1 \Leftrightarrow 8 \mid a^2-1$ y $5 \mid a^2-1$

• $r_5(a)$ 0 1 2 3 4

$r_5(a^2)$ 0 1 4 4 1 $\Big\}\ 5 \mid a^2-1$ si $a \equiv 2(5)$ ó $a \equiv 3(5)$

$r_5(a^2-1)$ 1 2 0 0 2

• $r_8(a)$ 0 1 2 3 4 5 6 7

$r_8(a^2)$ 0 1 4 1 0 1 4 1 $\Big\}\ 8 \nmid a^2-1$

$r_8(a^2-1)$ 1 2 5 2 1 2 5 2

• si $a \equiv 7(8)$ y $a \equiv 2$ ó $3\ (5)$: $8 \mid a-1$ y $5 \mid a^2-1$

↳ cumplen que $(a^3+21 : 20) = 2$

$\Rightarrow \underline{40 \mid a(a-1)(a^2-1)}$ ✗

(5) $\begin{cases} 7 \mid n \\ (n : 270) = 18 = 2 \cdot 3^2 \\ n \text{ tiene } 18 \text{ Div}^+ \end{cases}$

- $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ con p_i $(1 \leq i \leq n)$ primos y α_j $(1 \leq j \leq n)$ naturales.
- $2 \mid n$, $3^2 \mid n$, $3^3 \nmid n$, $5 \nmid n$

$n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \, p_5^{\alpha_5} \cdots p_n^{\alpha_n}$

con $\alpha_1 \geq 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 0$ y $\alpha_4 \geq 1$

- n mínimo es: $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7 \cdot p_5^0 \cdots p_n^0 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 = n_1$.
- n_1 tiene $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1)(\alpha_4 + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12 \text{ Div}^+$
- Si n estuviera compuesto por otro primo diferente a 2, 3 y 7, tendría como mínimo 24 divisores positivos.
- ∴ para que tenga 18 Div$^+$ α_1 o α_4 tienen que ser mayores:

$\alpha_1 = 2 \longrightarrow n$ tendría 18 Div$^+$

o

$\alpha_4 = 2 \nearrow$

Respuesta: $n = \underset{\substack{\parallel \\ 252}}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7}$ o $n = \underset{\substack{\parallel \\ 882}}{2 \cdot 3^2 \cdot 7^2}$