PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)

PRÁCTICA 8

1. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población normal.

   a) Encontrar un intervalo de confianza de nivel exacto $1-\alpha$ para la media cuando la varianza es conocida.

   b) Se realiza a 10 pacientes un análisis de sangre y se determina el porcentaje de hemoglobina, obteniéndose $\bar{X} = 12$.

      i) Hallar un intervalo de confianza para la media verdadera de nivel exacto 0.90, suponiendo que la concentración de hemoglobina se distribuye normalmente y que $\sigma = 0.6$.

      ii) Si se quisiera que la longitud del intervalo hallado en i) fuera a lo sumo 0.5, ¿a cuántos pacientes debería analizarse?

2. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población normal.

   a) Encontrar un intervalo de confianza de nivel exacto $1-\alpha$ para la media cuando la varianza es desconocida.

   b) Repetir la parte i) del item b) del Ejercicio 1, suponiendo que la varianza es desconocida y el desvío standard muestral es $s = 0.5$.

3. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población normal.

   a) Encontrar un intervalo de confianza de nivel exacto $1-\alpha$ para la varianza cuando la media es conocida.

   b) En un aserradero se cortan varillas de madera cuya longitud es una v.a. con distribución normal. Se miden 25 varillas elegidas al azar, obteniéndose $\bar{X} = 180$ cm y $s = 10$ cm. Hallar un intervalo de confianza de nivel exacto 0.90 para la varianza verdadera, suponiendo que $\mu = 185$.
   Sugerencia: probar que $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = (n-1)s^2 + n(\overline{x}-\mu)^2$

4. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población normal.

   a) Encontrar un intervalo de confianza de nivel exacto $1-\alpha$ para la varianza cuando la media es desconocida.

   b) Repetir el item b) del Ejercicio 3 suponiendo que μ es desconocida.

5. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población $\mathcal{E}(\lambda)$.

   a) Probar que $2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i$ tiene distribución χ^2_{2n}.

   b) Hallar un intervalo de confianza para λ de nivel exacto $1-\alpha$.

   c) ¿Cuál sería el intervalo de confianza de nivel exacto $1-\alpha$ para $E(X_1)$? ¿Cuál es su longitud esperada?

   d) Aplicar b) a los datos del Ejercicio 5 a) de la Práctica 7, con nivel $1-\alpha = 0.95$.

   e) Hallar un intervalo de nivel asintótico $1-\alpha$ para λ.

6. Una muestra aleatoria de 1000 votantes es encuestada respecto a cierta propuesta política. Como resultado, 200 están de acuerdo con la propuesta, 600 se oponen y 200 están indecisos.

   a) Hallar un intervalo de confianza de nivel asintótico 0.90 para la proporción de votantes que se oponen a la propuesta.

   b) ¿Cuántos votantes deberían encuestarse para que la longitud del intervalo obtenido fuese menor o igual que 0.02?

7. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población $Bi\,(k, \theta)$.

   a) Hallar un intervalo de confianza de nivel asintótico $1-\alpha$ para θ, siendo k conocido.

   b) Encontrar una cota superior para la longitud del intervalo hallado en a).

8. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población $\mathcal{P}\,(\lambda)$.

   a) Hallar un intervalo de confianza de nivel asintótico $1-\alpha$ para λ.

   NO b) Aplicar a) a los datos del Ejercicio 5 b) de la Práctica 7, con $\alpha = 0.05$.

9. a) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{U}[0, \theta]$. Hallar un intervalo de confianza de nivel exacto $1-\alpha$ para θ.

   SUGERENCIA: Encontrar la distribución de $\max\limits_{1\le i\le n} (X_i)\,/\theta$.

   b) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con densidad

   $$f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}\, I_{[\theta,\infty)}(x)$$

   Hallar un intervalo de confianza de nivel exacto $1-\alpha$ para θ.

   SUGERENCIA: Encontrar la distribución de $\min\limits_{1\le i\le n} (X_i) - \theta$.

   NO WAY c) (**Opcional**) En los casos a) y b) obtener el intervalo de menor longitud esperada.

10. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. continuas i.i.d. y con función de densidad dada por $f(x)$. Sea $\tilde{\mu}$ la mediana de la distribución de las X's, es decir $P(X_i \le \tilde{\mu}) = \dfrac{1}{2}$ para todo i.

    a) Probar que

    $$P\left(\max_{1\le i\le n} X_i < \tilde{\mu} \quad \cup \quad \min_{1\le i\le n} X_i > \tilde{\mu}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

    b) Deducir que $\left(\min\limits_{1\le i\le n} X_i,\ \max\limits_{1\le i\le n} X_i\right)$ es un intervalo de confianza para $\tilde{\mu}$ de nivel $1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

11. Se seleccionan muestras aleatorias independientes de dos poblaciones distintas y para la media de cada una de las poblaciones se construye un intervalo de confianza de nivel 0.90 (90%).

   a) Calcular la probabilidad de que ninguno de los intervalos contenga al verdadero valor de la media que estima.

   b) Calcular la probabilidad de que al menos uno de los intervalos no contenga al verdadero valor de la media que estima.

   c) Generalizar a) y b) al caso de k poblaciones, siendo $k \geq 2$.

1

1.

a) $\sqrt{n}\dfrac{(\bar{X}-\mu)}{\sigma_0} \sim N(0,1)$

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n}\frac{(\bar{X}-\mu)}{\sigma_0} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$IC_{1-\alpha} = \left[\bar{X} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$$

b) i) $\bar{X} = 12$, 0.6, $\sqrt{n} = \sqrt{10}$, $1-\alpha = 0.9$
$\alpha = 0.1$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05} = 1.64$$

$$IC_{0.9} = \left[12 - \frac{0.6}{\sqrt{10}} * 1.64, 12 + \frac{0.6}{\sqrt{10}} * 1.64\right]$$

$$= [11.69, 12.31]$$

ii) $L = 2 * \dfrac{0.6}{\sqrt{n}} * 1.64 \leq 0.5$

$$\sqrt{n} \geq 3.936$$

$$n \geq 15.49 \qquad \boxed{n = 16}$$

2.

a) $$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}\,\frac{(\bar{X}_n - \mu)}{S} \sim t_{n-1}$$

$$P\left(-t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}}{S}(\bar{X}_n - \mu) \leq t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$IC_{1-\alpha} = \left[\bar{X}_n - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} ; \bar{X}_n + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\right]$$

b) $$IC_{0.9} = \left[12 - \frac{0.5}{\sqrt{10}} * 1.8331, 12 + \frac{0.5}{\sqrt{10}} * 1.8331\right]$$

$$= [11.71, 12.29]$$

3. a) $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$$

$$IC_{1-\alpha} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n,\frac{\alpha}{2}}}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

②

b) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i\mu_0+\mu_0^2)$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\mu_0\sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu_0^2$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\mu_0 n\bar{x} + n\mu_0^2$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + n(\bar{x}^2 - 2\bar{x}\mu_0 - \mu_0^2) - n\bar{x}^2$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 + n(\bar{x}-\mu_0)^2$

$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2\right)\frac{n-1}{n-1} + n(\bar{x}-\mu_0)^2$

$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}(n-1) + n(\bar{x}-\mu_0)^2$

$= (n-1)s^2 + n(\bar{x}-\mu_0)^2$

$n=25,\ s=10,\ \bar{x}=180,\ \mu=185,\ 1-\alpha=0.9$
$\alpha=0.1$

$\chi^2_{25,0.05} = 37.652,\ \chi^2_{25,0.95} = 14.611$

$IC_{0.9} = \left[\frac{(25-1)10^2+25(180-185)^2}{46.928}, \frac{(25-1)10^2+25(180-185)^2}{14.611}\right]$

$= \left[\frac{3025}{37.652}, \frac{3025}{14.611}\right] = [80.34, 207.03]$

4.

a) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

$$IC_{1-\alpha} = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

b) $\bar{x} = 180$, $s = 10$, $n = 25$, $\chi^2_{24,0.05} = 36.415$, $\chi^2_{24,0.95} = 13.848$

$$IC_{0.9} = \left[\frac{2400}{36.415}, \frac{2400}{13.848}\right] = [65.91, 173.31]$$

5.

a) $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$

$\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, 1)$

$2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma\left(\frac{2n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \chi^2_{2n}$

③

b) $IC_{1-\alpha} = \left[\frac{\chi^2_{2n,1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sum_{i=1}^{n} X_i}, \frac{\chi^2_{2n,\frac{\alpha}{2}}}{2\sum_{i=1}^{n} X_i} \right]$

c) $IC_{1-\alpha} = \left[\frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{\chi^2_{2n,\frac{\alpha}{2}}}, \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{\chi^2_{2n,1-\frac{\alpha}{2}}} \right]$

d) $n=20, \alpha=0.05, \sum_{i=1}^{n} x_i = 823$

$\chi^2_{40,0.025}, \chi^2_{40,0.975}$

$IC_{0.95} = \left[\frac{\chi^2_{40,0.975}}{2*823}, \frac{\chi^2_{40,0.025}}{2*823} \right]$

e) $P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}_n - \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{\lambda^2}}{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \right) \simeq 1-\alpha$

$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}_n - \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{(\frac{1}{\lambda})^2}}{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \right) \simeq 1-\alpha$

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}-\frac{1}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{X}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \simeq 1-\alpha$$

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\overline{X}}{\sqrt{n}} \leq \overline{X}-\frac{1}{\lambda} \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\overline{X}}{\sqrt{n}}\right) \simeq 1-\alpha$$

$$P\left(\overline{X}-z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\overline{X}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\lambda} \leq \overline{X}+z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\overline{X}}{\sqrt{n}}\right) \simeq 1-\alpha$$

$$IC_{\text{Asint } 1-\alpha} = \left[\frac{1}{\overline{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\overline{X}}{\sqrt{n}}}, \frac{1}{\overline{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\overline{X}}{\sqrt{n}}}\right]$$

6.

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}_n-p}{\frac{\sqrt{p.(1-p)}}{\sqrt{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \simeq 1-\alpha$$

$$P\left(\overline{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}} \leq p \leq \overline{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}}\right) \simeq 1-\alpha$$

$$IC_{\text{Asintótico } 0.9} = \left[\frac{3}{5}-1.64\sqrt{\frac{\frac{3}{5}\frac{2}{5}}{1000}}, \frac{3}{5}+1.64\sqrt{\frac{\frac{3}{5}\frac{2}{5}}{1000}}\right] = [0.57, 0.63]$$

(4)

b) $2 z_{0.05} \sqrt{\frac{\bar{x}_n(1-\bar{x}_n)}{n}} \leq 0.02$

$$2 z_{0.05} \sqrt{\frac{\bar{x}_n(1-\bar{x}_n)}{n}} \leq 2 * 1.64 \frac{\sqrt{-(\bar{x}_n-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}}{\sqrt{n}}$$

$$\leq 2 * 1.64 \frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{\sqrt{n}} = \frac{1.64}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{50}$$

$$\sqrt{n} \geq 1.64 * 50$$

$$n \geq (1.64 * 50)^2$$

$$n \geq 6724$$

7.

ⓐ $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi(n, \theta)$

Por el TCL

$$\frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}_n - \theta}{\frac{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}{\sqrt{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \simeq 1-\alpha$$

$$IC_{\text{Asint } 1-\alpha} = \left[\bar{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}, \bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}\right]$$

b) $2 z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}} = 2 z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{-\left(\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}{n}}$

$$\leq 2 z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{\sqrt{n}} = \cancel{2} z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$0 \leq \bar{X}_n \leq 1$$

$$-\frac{1}{2} \leq \bar{X}_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \left(\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4} \leq -\left(\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$$

$$0 \leq -\left(\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

5

8.

a)

$$P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \leq -z_{\frac{\alpha}{2}} \right) \simeq 1-\alpha$$

$$P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\frac{\overline{X}_n}{n}}} \leq -z_{\frac{\alpha}{2}} \right) \simeq 1-\alpha$$

$$IC_{\text{Asintótico } 1-\alpha} = \left[\overline{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\overline{X}_n}{n}} \, , \, \overline{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\overline{X}_n}{n}} \right]$$

9.

a) $f_{T(x_1,\dots,x_n,\theta)}(x) = n x^{n-1} I_{[0,1]}(x)$

Busco a, b tal que

$$P\left(a \leq T(x_1,\dots,x_n,\theta) \leq b\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(a \leq \frac{1}{\theta} \max_{1\leq i\leq n}(x_i) \leq b\right) = 1-\alpha$$

$$IC_{1-\alpha} = \left[\frac{\max_{1\leq i\leq n}(x_i)}{b}, \frac{\max_{1\leq i\leq n}(x_i)}{a}\right]$$

$$b^n - a^n = 1-\alpha$$

$$b = 1, \quad a = \sqrt[n]{1-\alpha}$$

6

b) $Y = \min_{1 \le i \le n}(X_i) - \theta$

$$F_Y(y) = P(\min(X_i) \le y+\theta) = 1 - P(\min(X_i) > y+\theta) = 1-(1-F_X(y+\theta))^n$$

$$f_Y(y) = n\,(1-F_X(y+\theta))^{n-1} f_X(y+\theta)$$

$$= n\,(\cancel{1}-\cancel{1}+e^{\cancel{\theta}-y-\cancel{\theta}})^{n-1}\, e^{-(y+\cancel{\theta}-\cancel{\theta})}\, I_{[\theta,+\infty)}(y+\theta)$$

$$= n\, e^{-y(n-1)}\, e^{-y}\, I_{[0,+\infty)}(y)$$

$$= n\, e^{-yn}\, I_{[0,+\infty)}(y)$$