FINAL DE ÁLGEBRA I
(25-02-22)

N. I.
(nibanez123@gmail.com)

"...lo que la primavera hace con los cerezos."
Pablo Neruda

Ejercicio 1

Sea $\Re$ la relación definida en G_{32} por

$$z \Re w \iff z\bar{w} \in G_{24}.$$

a) Probar que $\Re$ es una relación de equivalencia.

b) Determinar la cantidad de elementos $z \in G_{32}$ relacionados con i.

Resolución:

a) $\Re$ reflexiva:

Sea $z \in G_{32}$. Luego,

$$z \Re z \Leftrightarrow z\bar{z} \in G_{24} \Leftrightarrow 1 \in G_{24}$$

(pues $z\bar{z} = |z|^2 = 1$), que vale.

$\Re$ simétrica:

Sean $z, w \in G_{32}$ tales que $z \Re w$, es decir, $z\bar{w} \in G_{24}$. Luego,

$$w \Re z \ \Leftrightarrow \ w\bar{z} \in G_{24} \ \Leftrightarrow \ \overline{w\bar{z}} \in G_{24} \ \Leftrightarrow \ \bar{w}z \in G_{24},$$

que vale.

$\Re$ transitiva:

Sean $z, w, v \in G_{32}$ tales que $z \Re w$ y $w \Re v$, es decir, $z\bar{w}, w\bar{v} \in G_{24}$. Luego,

$$z \Re v \ \Leftrightarrow \ z\bar{v} \in G_{24} \ \Leftrightarrow \ z\bar{w}w\bar{v} \in G_{24}$$

(usamos que $\bar{w}w = 1$), que vale pues G_{24} es cerrado por el producto por ser un grupo.

Se concluye así que $\Re$ es una relación de equivalencia.

b) Tenemos que

$$z \Re i \ \Leftrightarrow \ z\bar{i} \in G_{24} \ \Leftrightarrow \ (z(-i))^{24} = 1 \ \Leftrightarrow \ z^{24} = 1 \ \Leftrightarrow \ z \in G_{24}.$$

Entonces, como $G_{24} \cap G_{32} = G_{(24:32)} = G_8$, la cantidad de elementos $z \in G_{32}$ relacionados con i es 8.

■

Ejercicio 2

Sean $a \in \mathbb{N}$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de enteros definida por

$$x_1 = 2a, \quad x_2 = 9a^2 \ \text{ y } \ x_{n+2} = ax_{n+1} - x_n^3 \ \ \forall \ \ n \geq 1.$$

a) Probar que $a^n \mid x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Probar que si $a \neq 1$, para ningún $n \geq 3$ vale que $a^{n+1} \mid x_n$.

Resolución:

a) Usamos inducción. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, la afirmación dada por

$$P(n) : a^n \mid x_n.$$

Veamos que vale $P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 1$ resulta $a \mid 2a = x_1$.

Si $n = 2$ resulta $a^2 \mid 9a^2 = x_2$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos verdaderas $P(n)$ y $P(n+1)$ y veamos que lo es $P(n+2)$. Por H. I., existen $b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $x_n = ba^n$ y $x_{n+1} = ca^{n+1}$. Luego,

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= ax_{n+1} - x_n^3 = aca^{n+1} - (ba^n)^3 = ca^{n+2} - b^3a^{3n} \\ &= ca^{n+2} - b^3a^{n+2}a^{2n-2} = (c - b^3a^{2n-2})a^{n+2} \end{aligned}$$

y por la tanto $a^{n+2} \mid x_{n+2}$, pues $c - b^3a^{2n-2} \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probados los casos base y el paso inductivo, se concluye que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Usamos inducción. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, la afirmación dada por

$$P(n) : a^{n+1} \nmid x_n.$$

Veamos que vale $P(n)$ para todo $n \geq 3$.

Si $n = 3$ resulta

$$x_3 = ax_2 - x_1^3 = a9a^2 - (2a)^3 = a^3$$

, y por lo tanto

$$a^{3+1} \mid x_3 \;\Leftrightarrow a^4 \mid a^3 \;\Leftrightarrow\; a \mid 1,$$

lo que no sucede, así que $a^{3+1} \nmid x_3$.

Si $n = 4$ resulta

$$x_4 = ax_3 - x_2^2 = aa^3 - (9a^2)^3 = a^4 - 729a^6$$

, y por lo tanto

$$a^{4+1} \mid x_4 \;\Leftrightarrow a^5 \mid a^4 - 729a^6 \;\Leftrightarrow a^5 \mid a^4 \;\Leftrightarrow\; a \mid 1,$$

lo que no sucede, así que $a^{4+1} \nmid x_4$.

Sea $n \geq 3$. Supongamos verdaderas $P(n)$ y $P(n+1)$ y veamos que lo es $P(n+2)$. Por el ítem (a), $a^n \mid x_n$ y $a^{n+1} \mid x_{n+1}$, lo que implica que existen $b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $x_n = ba^n$ y $x_{n+1} = ca^{n+1}$, y luego por H. I., $a \nmid b$ y $a \nmid c$. Entonces,

$$a^{n+2+1} \mid x_{n+2} \Leftrightarrow a^{n+3} \mid ax_{n+1} - x_n^3 \Leftrightarrow a^{n+3} \mid aca^{n+1} - (ba^n)^3$$

$$\Leftrightarrow a^{n+3} \mid ca^{n+2} - b^3a^{3n} \Leftrightarrow a^{n+3} \mid ca^{n+2} \Leftrightarrow a \mid c,$$

lo que no sucede (usamos en la anteúltima equivalencia que $n+3 \leq 3n$ por ser $3 \geq n$), así que $a^{n+2+1} \nmid x_{n+2}$.

Probados los casos base y el paso inductivo, se concluye que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

Ejercicio 3

Hallar el menor número natural a que satisface

$$\begin{cases} 3 \cdot 7^{15} a \equiv -15 \pmod{36}, \\ (a : 425) = 5. \end{cases}$$

Resolución:

Tenemos que

$$\begin{aligned} 3 \cdot 7^{15} a \equiv -15 \pmod{36} &\Leftrightarrow 7^{15} a \equiv -5 \pmod{12} \\ &\Leftrightarrow 7^{15} a \equiv 7 \pmod{12} \\ &\Leftrightarrow 7^{14} a \equiv 1 \pmod{12} \\ &\Leftrightarrow 49^{7} a \equiv 1 \pmod{12} \\ &\Leftrightarrow 1^{7} a \equiv 1 \pmod{12} \\ &\Leftrightarrow a \equiv 1 \pmod{12} \end{aligned}$$

, donde usamos que $(7 : 12) = 1$.

Además, como $425 = 5^2 \cdot 17$, resulta

$$(a : 425) = 5 \Leftrightarrow 5 \mid a, \ 25 \nmid a \ \text{ y } \ 17 \nmid a.$$

Entonces, buscamos el menor número natural a tal que:

(i) $a \equiv 1 \pmod{12}$,

(ii) $5 \mid a$,

(iii) $25 \nmid a$, y

(iv) $17 \nmid a$.

Las condiciones (ii) y (iii) implican que existe $b \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 5b$ y $5 \nmid b$. Luego, por (i),

$$\begin{aligned} a \equiv 1 \pmod{12} &\Leftrightarrow 5b \equiv 1 \pmod{12} \\ &\Leftrightarrow 25b \equiv 5 \pmod{12} \\ &\Leftrightarrow b \equiv 5 \pmod{12}, \end{aligned}$$

(donde usamos que $(5 : 12) = 1$) que es equivalente a que exista $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = 12c + 5$ y $5 \nmid 12c + 5$ (y esta última condición equivale a $5 \nmid c$). Entonces, por (iv),

$$\begin{aligned} 17 \nmid a &\Leftrightarrow a \not\equiv 0 \pmod{17} \\ &\Leftrightarrow 5b \not\equiv 0 \pmod{17} \\ &\Leftrightarrow 5(12c+5) \not\equiv 0 \pmod{17} \\ &\Leftrightarrow 60c + 25 \not\equiv 0 \pmod{17} \\ &\Leftrightarrow 60c \not\equiv -25 \pmod{17} \\ &\Leftrightarrow 9c \not\equiv 9 \pmod{17} \\ &\Leftrightarrow c \not\equiv 1 \pmod{17} \end{aligned}$$

(donde usamos que $(9 : 17) = 1$).

Entonces, a es el mínimo número natural tal que $a = 60c + 25$ con $c \in \mathbb{Z}$ tal que $5 \nmid c$ y $c \not\equiv 1 \pmod{17}$. Luego, si $c < 0$ resulta $a < 0$, si $c = 0$ resulta $5 \mid c$, y si $c = 1$ queda $c \equiv 1 \pmod{17}$, de lo cual se obtiene que $c = 2$, y por lo tanto $a = 60 \cdot 2 + 25 = 145$.

■

Ejercicio 4

Describir todos los pares $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ para los cuales el polinomio

$$f = X^4 + 2aX^2 + b$$

tiene raíces múltiples en $\mathbb{C}$, y para cada par (a,b) determinar la cantidad de raíces distintas y la multiplicidad de cada raíz. (No hace falta calcular exactamente las raíces.)

Resolución:

Como $\alpha \in \mathbb{C}$ es raíz múltiple de f si y sólo si $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$, tenemos que encontrar los pares $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tales que f y f' compartan al menos una raíz. Luego, como $f' = 4X^3 + 4aX = 4X(X^2 + a)$, si $\alpha \in \mathbb{C}$ es raíz de f', resulta $\alpha = 0$ o $\alpha^2 + a = 0$.

Si $\alpha = 0$,

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

Si $\alpha^2 + a = 0$ (que implica $\alpha^2 = -a$),

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^4 + 2a\alpha^2 + b = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a^2 + b = 0 \Leftrightarrow b = a^2.$$

Entonces, f tiene raíces multiples en $\mathbb{C}$ para los pares $(a,0)$ y (a,a^2) con $a \in \mathbb{C}$.

Para un par de la forma $(a,0)$ con $a \in \mathbb{C}$ resulta

$$f = X^4 + 2aX^2 = X^2(X^2 + 2a),$$

que tiene una sola raíz de orden 4 si $a = 0$, y tres raíces distintas si $a \neq 0$, dos simples y una de orden 2.

Para un par de la forma (a,a^2) con $a \in \mathbb{C}$ resulta

$$f = X^4 + 2aX^2 + a^2 = (X^2 + a)^2,$$

que tiene una sola raíz de orden 4 si $a = 0$, y dos raíces distintas de orden 2 si $a \neq 0$.

■