2 DE AGOSTO, 2016

FINAL DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (COMPUTACIÓN)

RESUELVA SOLAMENTE 6 EJERCICIOS, 3 DE CADA PARTE. SE APRUEBA CON 4 EJERCICIOS BIEN HECHOS, 2 DE LOS CUALES DEBEN SER DE CADA PARTE. INDIQUE CUÁLES ELIGIÓ. JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

~~PRIMER~~ PRIMERA PARTE

1) a) SEAN $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ E $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ INDEPENDIENTES, HALLAR LA DISTRIBUCIÓN DE $X+Y$. JUSTIFIQUE SU RESPUESTA

b) SEA $X \sim N(0,1)$. PROBAR QUE $X^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$

2) a) PROBAR QUE SI $A \subset B$ Y A Y B SON INDEPENDIENTES, ENTONCES $\mathbb{P}(A)=0$ Ó $\mathbb{P}(B)=1$

b) PROBAR QUE UN EVENTO A ES INDEPENDIENTE DE CUALQUIER OTRO EVENTO B SI Y SOLO SI $\mathbb{P}(A)=0$ O $\mathbb{P}(A)=1$

3) UNA COMPUTADORA FUNCIONA CON DOS BATERÍAS, CUANDO SE AGOTA LA PRIMERA COMIENZA A FUNCIONAR LA SEGUNDA, SIN INTERRUMPIR LA ACTIVIDAD DE LA COMPUTADORA. SEAN X E Y LOS TIEMPOS DE DURACIÓN DE CADA UNA DE LAS BATERÍAS, MEDIDOS EN HORAS. SE SUPONE QUE X E Y SON INDEPENDIENTES Y TIENEN DISTRIBUCIÓN $\mathcal{E}(1/3)$

a) HALLAR LA DENSIDAD CONJUNTA DE X E Y

b) HALLAR LA PROBABILIDAD DE QUE LA COMPUTADORA DURE POR MÁS DE 6 HORAS SEGUIDAS

4) a) ENUNCIAR Y PROBAR EL TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

b) SEA $X \sim \mathcal{G}e(p)$, $0 < p < 1$, Y SEA $Y = Bi(X, q)$ DONDE $0 < q < 1$

CALCULAR $\mathbb{P}(Y = 1 \mid X = 5)$ Y $\mathbb{P}(Y = 1)$

5) CADA MAÑANA AURELIA VA AL TRABAJO CAMINANDO O EN BICICLETA, DEPENDIENDO DE CUÁN TEMPRANO SE LEVANTE. EL TIEMPO QUE TARDA EN LLEGAR CAMINANDO ES UNA VARIABLE ALEATORIA $U[0, 40]$ Y EL TIEMPO QUE TARDA EN LLEGAR EN BICICLETA ES UNA VARIABLE $\mathcal{E}(1/15)$, SI EL TIEMPO ES MEDIDO EN MINUTOS. LA PROBABILIDAD DE QUE SE LEVANTE TEMPRANO Y VAYA CAMINANDO ES $1/4$

a) SEA X LA VARIABLE QUE MIDE EL TIEMPO (EN MINUTOS) QUE TARDA AURELIA EN LLEGAR AL TRABAJO. CALCULAR LA DENSIDAD DE X

b) HALLAR LA ESPERANZA DE X

SEGUNDA PARTE

1) SEAN T_m Y W_m DOS ESTIMADORES INSESGADOS DE UN PARÁMETRO θ Y SE LOS COMBINA PARA FORMAR UN NUEVO ESTIMADOS $\hat{\theta}_m = \alpha T_m + \beta W_m$ DONDE α Y β SON CONSTANTES

a) ¿QUÉ CODICIONES DEBEN CUMPLIR LAS CONSTANTES α Y β PARA QUE $\hat{\theta}_m$ SEA INSESGADO?

b) SI T_m Y W_m SON INDEPENDIENTES Y TIENEN VARIANZAS $V(T_m)$ Y $V(W_m)$ RESPECTIVAMENTE, CALCULAR LA VARIANZA DE $\hat{\theta}_m$

c) HALLAR LOS VALORES DE α Y β QUE MINIMIZAN LA VARIANZA DE $\hat{\theta}_m$, Y QUE ADEMÁS ASEGURAN QUE $\hat{\theta}_m$ SEA INSESGADO.

2) SEAN $X_1, \ldots, X_m$ iid CON DISTRIBUCIÓN $U_{[0,\lambda]}$

a) CALCULAR EL ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSIMILITUD $\hat{\lambda}$ DE λ

b) HALLAR LA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE $\hat{\lambda}$ Y DECIDIR SI ES INSESGADO O ASINTÓTICAMENTE INSESGADO

3) EN UN JUEGO DE AZAR LA PROBABILIDAD DE GANAR ES 0,25. PARA PARTICIPAR DEL MISMO SE PAGA 1 PESO, Y EN CASO DE GANAR SE RECIBEN 5 PESOS. APROXIMAR LA PROBABILIDAD DE QUE EN 100 JUEGOS INDEPENDIENTES UN JUGADOR GANE MÁS DE 80 PESOS

4) ENCUENTRE EL GRAFO Y LA MEDIDA INVARIANTE ASOCIADA A LA CADENA DE MARKOV CON MATRIZ DE TRANSICIÓN

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

5) SEAN $X_1, \ldots, X_m$ UNA MUESTRA ALEATORIA DE UNA DISTRIBUCIÓN $N(\mu, 4)$

a) HALLAR UN INTERVALO DE CONFIANZA DE NIVEL 0,9 PARA μ

b) ¿QUÉ TAMAÑO DE MUESTRA m DEBERÍA TOMARSE PARA ASEGURAR QUE LA LONGITUD DEL INTERVALO HALLADO SEA MENOR QUE 0,1?

~~A~~ En el final José nos dio la tabla de la normal y un par de hojas con las distribuciones que vimos durante la cursada (cada una con sus respectivas esperanzas, varianzas y función de densidad / probabilidad puntual.

~~Un~~ Fueron 3 horas y se extendió por media hora más.
Un consejo que puedo dar es que si tienen ya el final de Análisis, apenas aprueben las prácticas se manden a dar el final. ~~Esta~~ El nivel de dificultad no supera al de los parciales.

EJERCICIOS PARTE 1

3) a) Usar que si X e Y son independientes $f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

b) Usar que si $X \sim \mathcal{E}(1/3)$ e $Y \sim \mathcal{E}(1/3)$ entonces $X+Y = Z \sim \Gamma(2, 1/3)$ y calcular $\mathbb{P}(Z > 6)$ (Es un ejercicio de integración por partes)

4) a) Solo enunciar y probar el teorema

b) $\underbrace{\mathbb{P}(Y=1 | X=5)}_{\text{~~Esto es la proba~~}} = \binom{5}{1} \cdot q^1 \cdot (1-q)^4 = 5q(1-q)^4$

$\rightarrow$ Esto es $\mathbb{P}(Z=1)$ donde $Z \sim Bi(5, q)$

$\mathbb{P}(Y=1) \underset{\text{P}}{=} \mathbb{P}(Y=1 | X=1) \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(Y=1 | X=2) \mathbb{P}(X=2) + \ldots =$

Hay que usar probabilidad total

$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y=1 | X=i) \cdot \mathbb{P}(X=i) = \sum_{i=1}^{\infty} \binom{i}{1} \cdot q^1 \cdot (1-q)^{i-1} \cdot P \cdot (1-P)^{i-1}$

El truco es llevar la sumatoria a la esperanza de una geométrica

$\binom{i}{1} = \frac{i!}{1!(i-1)!} = i \qquad (1-q)^{i-1} \cdot (1-P)^{i-1} = [(1-q)(1-P)]^{i-1} =$

$= [1-P-q+Pq]^{i-1} = [1-(P+q-Pq)]^{i-1}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot p \cdot q \cdot [1-(p+q-pq)]^{i-1} = pq \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot [1-(p+q-pq)]^{i-1} =$$

$$= pq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p+q-pq}{p+q-pq} \cdot i \cdot [1-(p+q-pq)]^{i-1} =$$

$$= \frac{pq}{p+q-pq} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot (p+q-pq) \cdot [1-(p+q-pq)]^{i-1}}_{\text{esperanza de una } Ge(p+q-pq)} =$$

$$= \frac{pq}{p+q-pq} \cdot \frac{1}{p+q-pq} = \boxed{\frac{pq}{(p+q-pq)^2}}$$

5) a) Hay que usar probabilidad total para conseguir $F_X(x)$ y después derivar

b) Sólo calcular la esperanza

SEGUNDA PARTE

2) a) y b) Es un ejercicio como los de la práctica

3) Tomar la v.a. $G_i = \{$ganancia en el juego $i\}$

$$G_i = \begin{cases} 4 & \text{si } X_i = 1 \\ -1 & \text{si } X_i = 0 \end{cases} \quad \text{donde } X_i = \{\text{ganar el juego } i\}$$

$$X_i \sim Be(1/4)$$

$E(G_i) = (-1) \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4}$

Calcular $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{80} G_i \geq 80\right)$ usando TCL

5) Es un ejercicio como los de la práctica