Klimkowski Victoria   N° Libreta: 1390/21   Lic. ciencias de datos   Turno mañana M-V, 10:00 - 13:00

1	2	3	4	Calif
B	B	B	B	A

(4) $f \in \mathbb{Q}[x]$, f mónico de grado mínimo

•) $1+\sqrt{2}$ raíz de f

Como $f \in \mathbb{Q}[x]$, todos sus coeficientes son racionales. Luego, $1-\sqrt{2}$ también es raíz ✓

$(x-(1+\sqrt{2})).(x-(1-\sqrt{2})) \mid f$ con $(x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{2})) = x^2-2x-1$ ✓

•) $x^2(x+1) \mid (f : f')$

Si un polinomio divide al mcd, divide a ambos por separado y $(x^2) \perp (x+1)$. Luego,

$x^2 \mid f'$, $x^2 \mid f$, $(x+1) \mid f'$, $(x+1) \mid f$

Como $x^2 \mid f'$ ~~sería~~ 0 es raíz por lo menos triple ya que $x^2 \mid f$

Como $x+1 \mid f'$ es raíz por lo menos doble ya que $x+1 \mid f$

Luego, $x^3(x+1)^2 \mid f$ ✓. Observo que $[x^3 \perp (x+1)^2 \perp (x^2-2x-1)]$

•) $f(1) = 20$

Tengo que $(x^2-2x-1).x^3.(x+1)^2 \mid f$ pero $(1^2-2-1).1.(1+1)^2 \neq 20$

Necesito que sea mónico (no puedo multiplicar por ~~todo~~ algún coeficiente principal) así que agrego otra raíz. ✓ :)

$g = (x^2-2x-1).x^3(x+1)^2(x-\alpha) \mid f$

$g(1) = (1^2-2-1).1.(1+1)^2(1-\alpha) = 20 \iff 1-\alpha = \frac{-20}{8}$

$\alpha = \frac{7}{2}$

$g = (x^2-2x-1).x^3(x+1)^2(x-\frac{7}{2})$ ✓

Como g cumple todas las condiciones y en todas se mantuvo el menor grado posible, $g = f \in \mathbb{Q}$ de grado 8

$f = (x^2-2x-1).x^3(x+1)^2(x-\frac{7}{2})$, (Factorización en $\mathbb{Q}$ ya que todos están con gr 1 y su multiplicidad salvo (x^2-2x-1) que tiene 2 raíces irracionales) conjugadas

Bien.

③ $F = x^6 - (a-1)x^5 - (a-1)x^4 - (a-1)x^3 - (a+2)x^2 + \dots$

$\dots + 2(a-1)x + 2a$ con a raíz múltiple

a) Hago Ruffini porque si no no me entran las cuentas en la hoja

	1	$-a+1$	$-a+1$	$-a+1$	$-a-2$	$2a-2$	$2a$
a		a	a	a	a	$-2a$	$-2a$
	1	1	1	1	-2	-2	$\lfloor 0$

Como el resto no depende de a, a siempre es raíz (~~al menos simple~~) (todas las raíces son al menos simple) $F = (x-a)(x^5+x^4+x^3+x^2-2x-2)$

Necesito que sea al menos doble así que vuelvo a hacer Ruffini

	1	1	1	1	-2	-2
a		a	a^2+a	a^3+a^2+a	$a^4+a^3+a^2+a$	$a^5+a^4+a^3+a^2-2a$
	1	$a+1$	a^2+a+1	a^3+a^2+a+1	$a^4+a^3+a^2+a-2$	$\lfloor a^5+a^4+a^3+a^2-2a-2$

Necesito que $a^5+a^4+a^3+a^2-2a-2=0$ pero sé que $a \in \mathbb{Q}[x]$

Así que busco las raíces racionales de $x^5+x^4+x^3+x^2-2x-2$ con Gauss. Candidatos $\{\pm 2, \pm 1\}$ pero las únicas que funcionan son ± 1.

Luego, $\boxed{a=-1}$ o $\boxed{a=1}$

b) El menor valor de a hallado es -1, luego, reemplazando en el segundo Ruffini, sabiendo que a es raíz al menos doble,

$F = (x+1)^2(x^4 + x^2 - 2)$ pues 1 es el coeficiente principal (CP) de x^4, $a+1$ es el cp (coeficiente) de x^3, a^2+a+1 es el cp de x^2, a^3+a^2+a+1 es el cp de x y $a^4+a^3+a^2+a-2$ es el término independiente.

Para reducir el (x^4+x^2-2) tomo $x^2=y$ y aplico la fórmula de Bhaskara a y^2+y-2 y sus raíces son -2 y 1

Entonces $x^2=-2$, $x^2=1$

↳ $\sqrt{2}\,i$; ↳ $x=1$

↳ $-\sqrt{2}\,i$; ↳ $x=-1$

Entonces me queda $F = (x+1)^2(x+1)(x-1)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$

Que es lo mismo que $F = (x+1)^3(x-1)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$ la cual es la factorización en irreducibles en $\mathbb{C}[x]$ pues son todos polinomios de grado 1 ✓ con -1 raíz triple

Para la factorización en $\mathbb{R}[x]$ multiplico $(x-\sqrt{2}i).(x+\sqrt{2}i)$ ya que una raíz es la conjugada de la otra, lo cual da x^2+2

La ~~descomposición~~ factorización en $\mathbb{R}[x]$ entonces queda como

$F = (x+1)^3(x-1)(x^2+2)$ pero, a su vez, tiene todas raíces coeficientes racionales.

Luego, también será la factorización en $\mathbb{Q}[x]$.

② a $r_{20}(8^{3^n-2})$

Quiero ver la congruencia de 8^{3^n-2} mod 20 así que la miro mod 4 y mod 5 pues $20 = 4.5$ y $(4 \perp 5)$ ✓

$8^{3^n-2} \equiv 0 \ (4) \ \forall n \in \mathbb{N}$ pues $4 \mid 8$ y $3^n - 2 \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$8^{3^n-2} \equiv 3^{3^n-2} \ (5)$ y como 5 es primo y $5 \perp 3$, puedo usar PTF ✓ y mirar el exponente mod 4 pues $3^4 \equiv 1 \ (5)$ ✓

$3^n - 2 \equiv (-1)^n - 2 \ (4)$ ✓

$\xrightarrow{n \text{ par}} (-1)^n - 2 \equiv 3 \ (4)$ ✓

$\xrightarrow{n \text{ impar}} (-1)^n - 2 \equiv 1 \ (4)$ ✓

n par
$8^{3^n-2} \equiv 3^{3^n-2} \equiv 3^3 \equiv 2 \ (5)$

n impar
$8^{3^n-2} \equiv 3^{3^n-2} \equiv 3^1 \equiv 3 \ (5)$

Llamo x a 8^{3^n-2}

Si n es par
$\left.\begin{array}{l} \bullet\ x \equiv 0 \ (4) \\ \bullet\ x \equiv 2 \ (5) \end{array}\right\} \Leftrightarrow x \equiv 12 \ (20)$ ✓

Si n es impar
$\left.\begin{array}{l} \bullet\ x \equiv 0 \ (4) \\ \bullet\ x \equiv 3 \ (5) \end{array}\right\} x \equiv 8 \ (20)$ ✓

$\boxed{\begin{array}{l} (n \text{ par}) \\ r_{20}(8^{3^n-2}) = 12 \\ (n \text{ impar}) \\ r_{20}(8^{3^n-2}) = 8 \end{array}}$

(Por TCR existe sólo una solución mod 20) ✓ !!

Bien.

① $51a + 33b = 21$ y $8a \equiv b \pmod{49}$

Empiezo con la diofántica coprimizando, dividiendo todos los coeficientes por 3.

$$\div 3 \begin{cases} 51a + 33b = 21 \\ \rightarrow 17a + 11b = 7 \end{cases}$$

y sé que tiene solución pues $(17:11) \mid 7$

Algoritmo de Euclides

$(17:11)$ $\quad 17 = 11 \cdot 1 + 6$

$(11:6)$ $\quad 11 = 6 \cdot 1 + 5$

$(6:5)$ $\quad 6 = 5 \cdot 1 + 1$

$$1 = 6 - 5$$
$$1 = 6 - (11 - 6) = -11 + 2 \cdot 6$$
$$= -11 + 2(17 - 11)$$
$$1 = 2 \cdot 17 + (-3) \cdot 11$$
$$\xrightarrow{\times 7} 7 = 14 \cdot 17 + (-21) \cdot 11$$

Como $a = 14$ y $b = -21$ es una solución particular, puedo afirmar que

$a = 14 - 11k$
$b = -21 + 17k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Por comodidad, voy a tomar $a = 3 - 11k$, $b = -4 + 17k$, con $k \in \mathbb{Z}$ OK

Reemplazo en la segunda ecuación

$8(3 - 11k) \equiv -4 + 17k \ (49)$

$28 \equiv 105k \ (49) \iff 7k \equiv 28 \ (49)$ y aquí coprimizo dividiendo todos los términos por 7, $k \equiv 4 \ (7)$

Entonces, $k = 7q + 4$ con $q \in \mathbb{Z}$

Luego, $a = 3 - 11(7q + 4) = -77q - 41$
$b = -4 + 17(7q + 4) = 119q + 64$ con $q \in \mathbb{Z}$

Bien.