favor, al finalizar el examen señale claramente aquí qué ejercicios entrega

¡¡SIN TIEMPO!!

*Entrego ejercicios* 1 2 3 4 (Reservado para el corrector):

| 1 | 2 | 3 | 4 | Nota |
|---|---|---|---|---|
| 18 | 23 | / | 22 | 63 |

A

**Por favor, resuelva cada ejercicio en hojas separadas. Numere todas las hojas y coloque en cada una su nombre y apellido.** *Para aprobar es necesario tener al menos 60 puntos. Justifique todas sus respuestas.*

1. (20 puntos) Se tienen dos urnas, la urna A tiene 7 bolitas rojas y 5 azules, la urna B tiene 2 bolitas rojas y 8 azules. Se arroja un dado de 4 caras, si sale 1 o 3 se extraen bolitas **sin reposición** de la urna A. En otro caso, se extraen bolitas **con reposición** de la urna B. La cantidad de bolitas extraídas es igual al número obtenido en el dado.

   (a) (10 puntos) Calcular la probabilidad de obtener exactamente dos bolitas rojas.

   (b) (10 puntos) Son independientes los eventos $SP$="el dado salió par" y $R_2$="salieron exactamente dos bolitas rojas"?

2. (27 puntos) Una tienda de tecnología situada en una localidad del polo tecnológico de Bangalore (India) tiene 8 empleados. Se supone que la cantidad de clientes que atiende cada empleado es un proceso de Poisson de 3 clientes por hora. La cantidad de clientes que atiende cada empleado son independientes. Un empleado se dice "sobrepasado" si en una hora determinada atiende al menos 5 clientes.

   (a) (8 puntos) Calcular la probabilidad de que en una hora determinada haya a lo sumo dos empleados sobrepasados.

   (b) (10 puntos) El sueldo por hora de un empleado es de 50 rupias más 10 rupias por cada cliente que atiende, con un tope de 90 rupias. Calcular el valor esperado del sueldo de un empleado en una hora determinada.

   (c) (9 puntos) El local cuenta con dos sanitarios, uno para hombres y otro para mujeres. Asumamos que cada cliente que va al sanitario usa el de hombres con probabilidad 0.6 y el de mujeres con probabilidad 0.4 y lo hacen en forma independiente. Un sanitario habrá de ser limpiado después de que pasen 5 clientes. Si llamamos $C$ a la variable aleatoria que cuenta la cantidad de clientes que usan el sanitario hasta que es necesario hacer la primer limpieza.

      algún un use sanitario

      i. (6 puntos) Calcular la función de probabilidad puntual de $C$.

      ii. (3 puntos) Calcular la probabilidad de que el primer sanitario que se limpie sea el de caballeros.

3. (28 puntos) Una fábrica de productos dulces elabora cajas de surtido de bombones. Cada caja tiene 15 bombones de dulce de leche, cuyo peso en gramos sigue una distribución $N(\mu = 20, \sigma^2 = 4)$, y 10 bombones de canela con caramelo, cuyo peso en gramos es una variable aleatoria continua $X$ que sigue una distribución dada por la siguiente densidad:

   de cada bombón

$$f_X(x) = (9/56000)x^2 I_{(10,20)}(x) + \frac{1}{8} I_{(20,25)}(x),$$

   (a) (8 puntos) Calcular la mediana de $X$.

   (b) (10 puntos) Se elige un bombón al azar de una caja, calcular el valor esperado de su peso.

   (c) (10 puntos) Se eligió un bombón al azar y se determinó que su peso es mayor a 22 gramos. Calcular la probabilidad de que sea de dulce de leche.

4. (25 puntos) Sea $(X, Y)$ un vector aleatorio continuo con la siguiente densidad:

$$f_{XY}(x, y) = (9/128)x^2 y^2 I_{(-2,2)}(x) I_{(-|x|,|x|)}(y),$$

   (a) (3 puntos) Graficar el soporte de $(X, Y)$.

   (b) (5 puntos) Hallar $f_X$.

   (c) (7 puntos) Calcular $P(Y < (1/2)X)$ y $P(|Y| < 3/4 | X = 1/2)$.

   (d) (5 puntos) Hallar $E(XY)$.

   (e) (5 puntos) Decidir si $X$ e $Y$ son independientes. Justificar

(1) Urna A: 7BR y 5BA.
Urna B: 2BR y 8BA.
Dado de 4 caras.
Sale: 1 o 3: sin rep. de A.
Sale: 2 o 4: con rep. de B.
Extrae número del dado bolitas.

a) [P(obtener dos bolitas rojas)?
$D_i$ = {el número obtenido en uno tirado del dado es impar}
$D_p$ = { " " " " " " " " par}

8/10

2R = {obtener 2 bolitas rojas}

$P(2R) = P(2R \cap D_i) + P(2R \cap D_p) =$

$= P(2R|D_i) \cdot P(D_i) + P(2R|D_p) \cdot P(D_p) =$

$= \frac{21}{88} \cdot \frac{1}{2} + \frac{248}{625} \cdot \frac{1}{2} \cong \boxed{0{,}32}$

$\bullet\ P(2R|D_i) = \frac{P(2R \cap \overset{D_1 \cup D_3}{\overset{\shortparallel}{D_i}})}{P(D_i)} = \frac{P(2R \cap D_1) + P(2R \cap D_3)}{P(D_i)} =$

$= \frac{\underbrace{P(2R|D_1)\, P(D_1)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + P(2R|D_3) \cdot P(D_3)}{P(D_i)} = \frac{0 + \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} \cdot \frac{1}{4}}{1/2} =$

$= (0 + \frac{21}{44} \cdot \frac{1}{4}) \, 2 = \frac{21}{88}$

$\bullet\ P(2R|D_p) = \frac{P(2R \cap D_p)}{P(D_p)} = \frac{P(2R \cap D_2) + P(2R \cap D_4)}{P(D_p)} =$

$= \frac{P(2R|D_2)\, P(D_2) + P(2R|D_4) \cdot P(D_4)}{P(D_p)} = \frac{\frac{2}{10} \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{4} + \binom{4}{2} \frac{8}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{4}}{1/2} =$

$\frac{\frac{1}{100}\,\frac{4}{25} + 6 \cdot \frac{4}{625}}{1/2} = \frac{248}{625}$

Arrastra error

1 ~ Bi (4, 1/5) !

b) SP = "el dado salió par"
$R_2$ = "salieron exactamente dos bolitas rojas"
¿son independientes?

10/10

Si los eventos fueran independientes valdría: $P(R_2 | SP) = P(R_2)$

$P(R_2) \cong 0{,}32$ (calculado en el ej. 1.a)

$P(R_2 | SP) = \frac{248}{625} \cong 0{,}39$ ( " " " " " )

∴ $\boxed{\text{los eventos no son independientes}}$

(2) 8 empleados

$X$ = # de clientes que atiende cada empleado por hora

$X \sim P(3)$

La cant. de clientes que atiende c/u son indep.

sobrepasado si $X \geq 5$

a) P (a lo sumo dos empleados sobrepasados en una hora)?

$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - (P(\{X=0\}) + P(\{X=1\}) +$
$+ P(\{X=2\}) + P(\{X=3\}) + P(\{X=4\})) \overset{\text{usando la tabla de Poisson}}{=} 1 - (0{,}05 + 0{,}149 +$
$+ 0{,}224 + 0{,}224 + 0{,}168) = 0{,}185$

$Y$ = # empleados sobrepasados en una hora

$Y \sim Bi(8; 0.185)$

$P(Y \leq 2) = P(\{Y=0\}) + P(\{Y=1\}) + P(\{Y=2\}) =$
$= \binom{8}{0} 0{,}185^0 \cdot (1-0{,}185)^8 + \binom{8}{1} 0{,}185^1 \cdot (1-0{,}185)^7 + \binom{8}{2} 0{,}185^2 \cdot$
$\cdot (1-0{,}185)^6 \cong 0{,}19 + 0{,}35 + 0{,}28 = \boxed{0{,}82}$

b) Sueldo de un empleado por hora: $50 + 10 \cdot X$

Tope de 90

Valor esperado del sueldo de uno en una hora

$S$ = sueldo de un empleado en una hora

$$S = \begin{cases} 90 & \text{si } X \geq 4 \\ 50 + 10 \cdot X & \text{si } X < 4 \end{cases}$$

$E(S) = 50 \cdot P(\{X=0\}) + 60 \cdot P(\{X=1\}) + 70 \cdot P(\{X=2\}) +$
$+ 80 \cdot P(\{X=3\}) + 90 \cdot P(\{X \geq 4\}) \overset{\text{usando la tabla de Poisson}}{=} 50 \cdot 0{,}05 + 60 \cdot 0{,}149 +$
$+ 70 \cdot 0{,}224 + 80 \cdot 0{,}224 + 90 \cdot (1 - (0{,}05 + 0{,}149 + 0{,}224 + 0{,}224)) =$
$= \boxed{76{,}81}$

c) 2 baños → M → lo usan con prob. 0,4
→ H → lo usan con prob. 0,6

limpian uno después de que pasen 5 por ahí

C = # clientes que usan alguno hasta hacerlo primer limpiado.

I. [$P_C(c)$?

M = # clientes que usan alguno hasta limpian el de mujeres

$M \sim BN(5; 0,4)$

H = # clientes que usan alguno hasta limpian el de hombres

$H \sim BN(5; 0,6)$

$$P_C(c) = P_M(c) + P_H(c) = \binom{c-1}{4} 0,4^5\, 0,6^{c-5} + \binom{c-1}{4} 0,6^5 \cdot 0,4^{c-5} \quad \text{si } c \geq 5 \text{ y } c \leq 9$$

$$P_C(c) = 0 \quad \text{si } c < 5 \text{ y } c > 9$$

[P (primero se limpie el de hombres)?

II.

a = 3 b = 5 c = 7 d = 5 e = 2

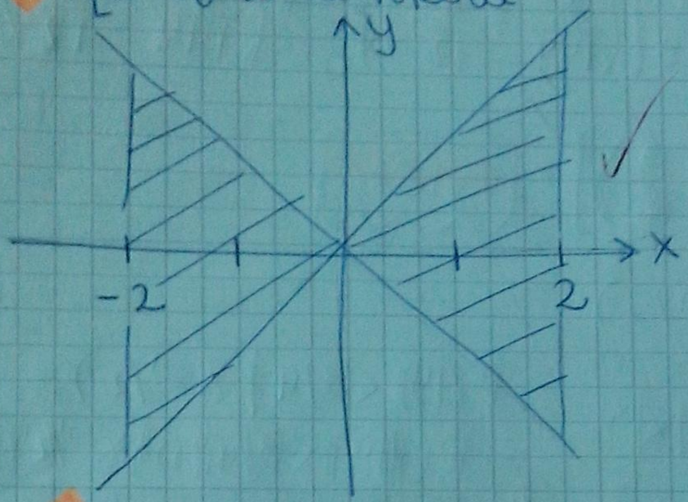
HOJA N° 1|2

FECHA

2P

4) $f_{XY}(x,y) = \frac{9}{128} x^2 y^2 \, I_{(-2,2)}(x) \, I_{(-|x|,|x|)}(y)$

a) Grafico del soporte




b) $f_X(x)$?

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{-|x|}^{|x|} \frac{9}{128} x^2 y^2 \, I_{(-2,2)}(x)\,dy =$$

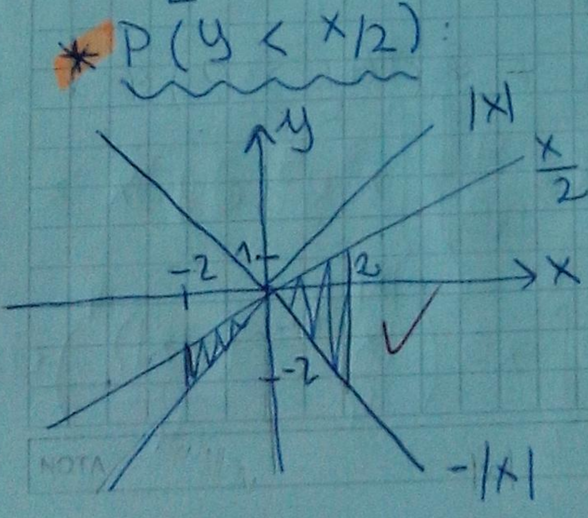
$$= \frac{9}{128} I_{(-2,2)}(x) \cdot x^2 \cdot \left.\frac{y^3}{3}\right|_{-|x|}^{|x|} = \frac{9}{128} x^2 \left(\frac{|x|^3}{3} + \frac{|x|^3}{3}\right) I_{(-2,2)}(x) =$$

$$= \frac{9}{128} x^2 \cdot 2 \cdot \frac{|x|^3}{3} I_{(-2,2)}(x) = \boxed{\frac{3}{64} x^2 \cdot |x|^3 \, I_{(-2,2)}(x)}$$

c) $P\left(y < \frac{x}{2}\right)$?

$P\left(|y| < 3/4 \mid x = 1/2\right)$?

* $P(y < x/2)$:




$$P\left(y < \frac{x}{2}\right) = \int_{-2}^{2} \int_{-|x|}^{x/2} \frac{9}{128} x^2 y^2 \,dy\,dx =$$

$$= \frac{9}{128} \int_{-2}^{2} x^3 \left.\frac{y^3}{3}\right|_{-|x|}^{x/2} dx =$$

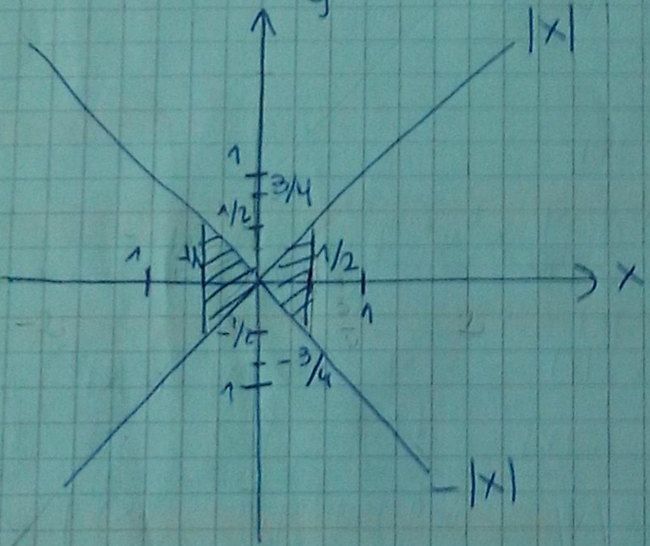
$$= \frac{9}{128}\int_{-2}^{2} x^2 \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_{-|x|}^{x/2} dx = \frac{9}{128}\int_{-2}^{2} x^2 \left[\frac{\frac{x^3}{8}}{3} + \frac{(+|x|)^3}{3}\right] dx$$

$$= \frac{9}{128}\int_{-2}^{2} x^2 \cdot \frac{x^3}{24} + \frac{|x|^3}{3}\, dx = \frac{9}{128}\Big[\int_{0}^{2} \frac{x^5}{24} + \frac{x^3}{3}\, dx +$$

$$+ \int_{-2}^{0} \frac{x^5}{24} - \frac{x^3}{3}\, dx\Big] = \frac{9}{128}\left[\left(\frac{x^6}{144} + \frac{x^4}{12}\right)\Big|_{0}^{2} + \left(\frac{x^6}{144} - \frac{x^4}{12}\right)\Big|_{-2}^{0}\right] =$$

$$= \frac{9}{128}\left[\left(\frac{16}{9}\right) + \left(0 + \frac{8}{9}\right)\right] = \boxed{0{,}1875}$$

* $P(|y| < 3/4 \mid x = 1/2)$:




$$P(|y| < 3/4 \mid x = 1/2) = \frac{P(\{|y| < 3/4\} \cap \{x = 1/2\})}{P(\{x = 1/2\})} =$$

No

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{f_{xy}(1/2, y)}{f_x(1/2)}\, dy =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\frac{9}{128}\left(\frac{1}{2}\right)^2 y^2\, dy}{\frac{3}{2048}} =$$

$$= 12\int_{-1/2}^{1/2} y^2\, dy = 12 \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_{-1/2}^{1/2} = 12\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{24}\right) = \boxed{1}$$

d) [E(xy)?

$$E(xy) = \int_{-2}^{2}\int_{-|x|}^{|x|} x\, y\, f_{xy}(x,y)\, dy\, dx = \frac{9}{128}\int_{-2}^{2}\int_{-|x|}^{|x|} x^3 y^3\, dy\, dx =$$

$$= \frac{9}{128}\int_{-2}^{2} x^3\, \frac{y^4}{4}\Big|_{-|x|}^{|x|} dx = \frac{9}{128}\int_{-2}^{2} x^3\left(\frac{|x|^4}{4} - \frac{(-|x|)^4}{4}\right) dx =$$

NOTA

$$= \frac{9}{128}\int_{-2}^{2} x^3 \cdot \underbrace{\left(\frac{|x|^4}{4} - \frac{|x|^4}{4}\right)}_{=0} dx = \frac{9}{128}\int_{-2}^{2} 0\, dx = \boxed{0}$$

e) ¿X e Y son indep?

X e Y son independientes si $f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{-2}^{2} \frac{9}{128} \cdot x^2 \cdot y^2\, I_{(-|x|,|x|)}(y)\, dx =$

$$= \frac{9}{128} \cdot y^2\, \underbrace{I_{(-|x|,|x|)}(y)}_{\text{mal sacado fuera de la integral.}} \cdot \underbrace{\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{2}}_{=\frac{16}{3}} = \frac{3}{8} \cdot y^2 \cdot I_{(-|x|,|x|)}(y)$$

- $f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{3}{8} \cdot y^2\, I_{(-|x|,|x|)}(y) \cdot \frac{3}{64} x^2 |x|^3\, I_{(-2,2)}(x) =$

$$= \frac{9}{512} y^2 x^2 |x|^3\, I_{(-|x|,|x|)}(y) \cdot I_{(-2,2)}(x) \neq f_{XY}(x,y)$$

$\therefore$ $\boxed{\text{X e Y no son independientes}}$