TEMA 1

1	2	3	4	CALIFICACIÓN
B/R	B	B	B	A

APELLIDO Y NOMBRE: Compitelli, Elio

No. DE LIBRETA: 536/12

TURNO: MA-Mi-VIE 18-22hs

CARRERA: Cs. de la Atmósfera.

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Primer Recuperatorio - Segundo Parcial - 14/07/2012

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^3 tal que su polinomio de Taylor de orden 2 centrado en el punto $(0,0)$ es $P(x,y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + 2xy + y^2$. Si $a \in \mathbb{R}$ definimos $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $g(x,y) = e^{f(x,y)} + af^2(x,y) + a^2xy$. Probar que para todo $a \in \mathbb{R}$ la función g tiene un punto crítico en $(0,0)$. Para cada valor de $a \in \mathbb{R}$ decidir si el punto crítico es o no un extremo.

2. Hallar los extremos de $f(x,y) = -x^2 + 2y^3 + 3y^2$ en el conjunto $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \leq \sqrt{3}x\}$. ¿Son absolutos? Justificar debidamente.

3. Analizar la convergencia de la siguiente integral impropia

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-(x+4)}}{\sqrt{x}(x+4)}\, dx$$

4. Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies $z^2 = 4x^2+y^2$ y $(z-2)^2 = 4x^2+y^2$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

Elio Campitelli
34080541 536/12

Hoja 1 de 4

2/5

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+4)}}{\sqrt{x}(x+4)}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{-(x+4)}}{\sqrt{x}(x+4)}\,dx}_{I} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x+4)}}{\sqrt{x}(x+4)}\,dx}_{II}$.

(I) $\displaystyle \frac{e^{-(x+4)}}{\sqrt{x}(x+4)} \leq \frac{e^{-(x+4)}}{\sqrt{x}}$.

$(x+4) \geq 1$
$\forall x \in [0,1)$

$$\frac{\frac{e^{-(x+4)}}{\sqrt{x}}}{1/\sqrt{x}} = e^{-(x+4)} \xrightarrow[x\to 0]{} e^{-4}$$

. Si $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(x+4)}}{\sqrt{x}}\,dx$ converge (criterio del límite).

. Como $\displaystyle\frac{e^{-(x+4)}}{\sqrt{x}(x+4)} \leq \frac{e^{-(x+4)}}{\sqrt{x}}$ $\forall x \in [0,1)$, entonces $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(x+4)}}{\sqrt{x}(x+4)}\,dx$ converge si $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(x+4)}}{\sqrt{x}}\,dx$ converge.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge, por lo tanto $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(x+4)}}{\sqrt{x}}\,dx$ converge y $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(x+4)}}{\sqrt{x}(x+4)}\,dx$ converge

(II) $\displaystyle\frac{e^{-(x+4)}}{\sqrt{x}(x+4)} = \frac{e^{-(x+4)}}{x^{3/2} + \underbrace{4\sqrt{x}}_{>0}} \leq \frac{e^{-(x+4)}}{x^{3/2}} = \frac{1}{\underbrace{e^{(x+4)}}_{\geq 1} \cdot x^{3/2}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$

$e^{(x+4)} \cdot x^{3/2} \geq x^{3/2}$

$e^{(x+4)} \geq 1 \quad \forall x>0$

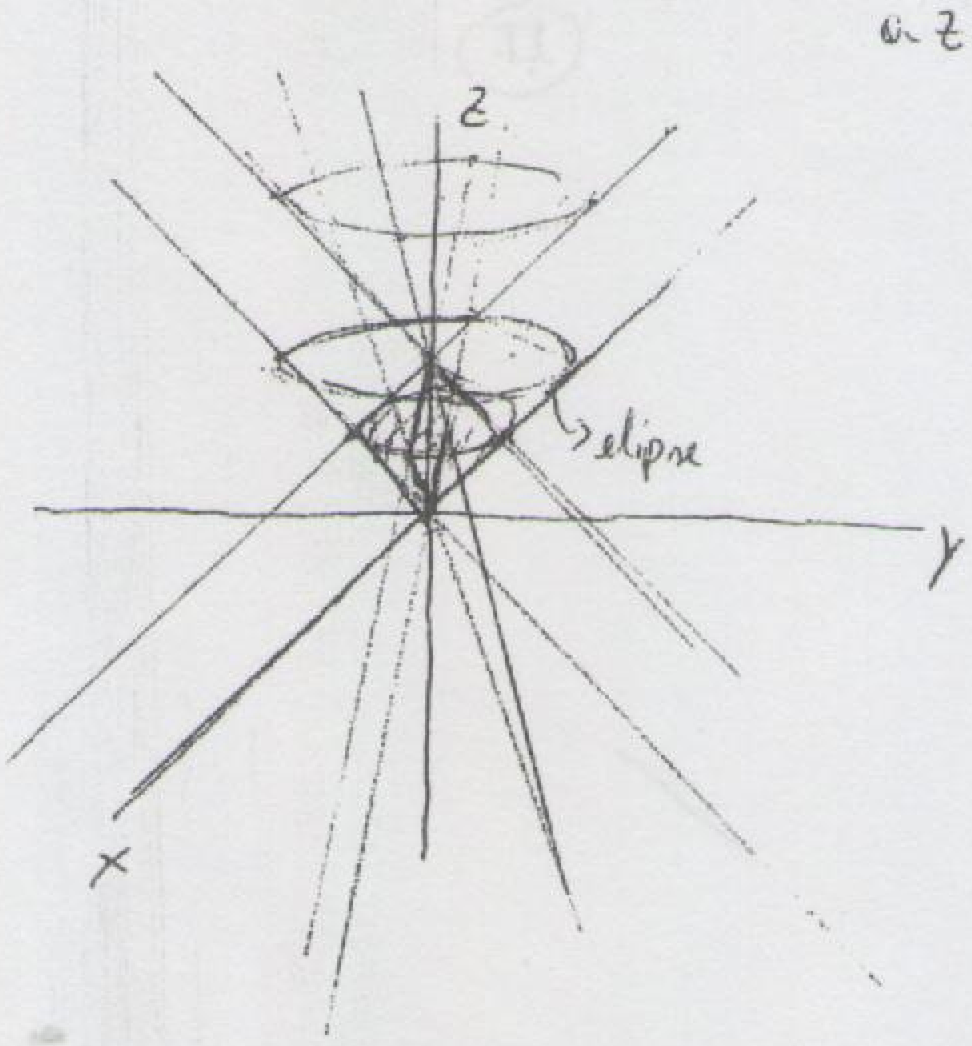
Como $\displaystyle\frac{1}{x^{3/2}} \geq \frac{e^{-(x+4)}}{\sqrt{x}(x+4)}$, entonces si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ converge, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x+4)}}{\sqrt{x}(x+4)}\,dx$ converge.

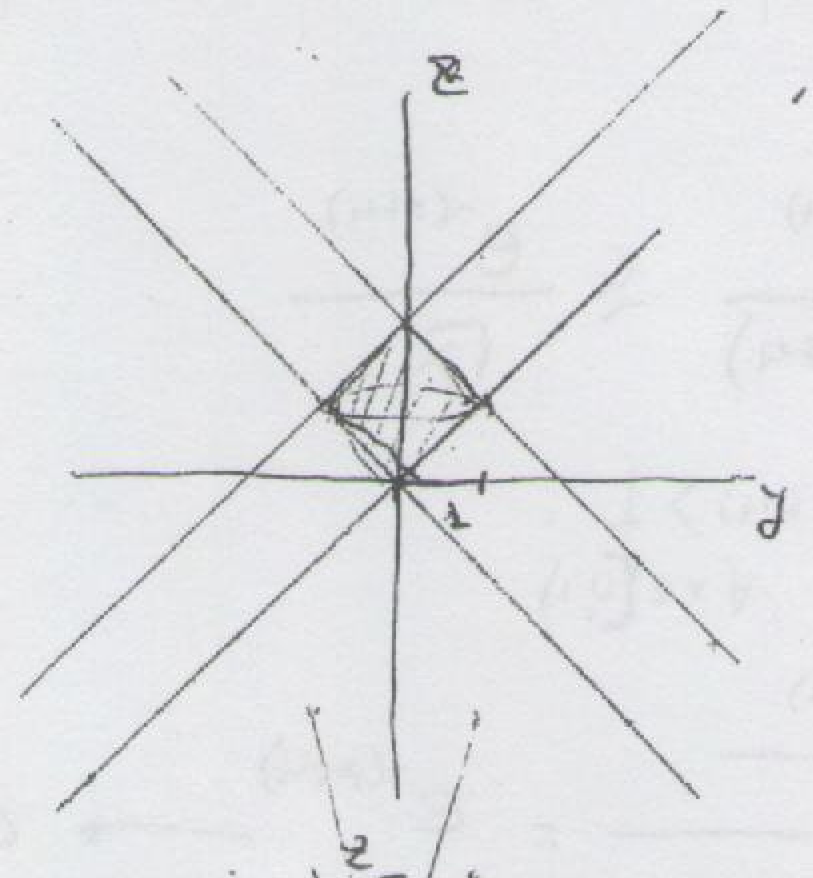
Como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x+4)}}{\sqrt{x}(x+4)}\,dx$ converge

(I) y (II) convergen, por lo tanto $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+4)}}{\sqrt{x}(x+4)}\,dx \text{ converge}}$

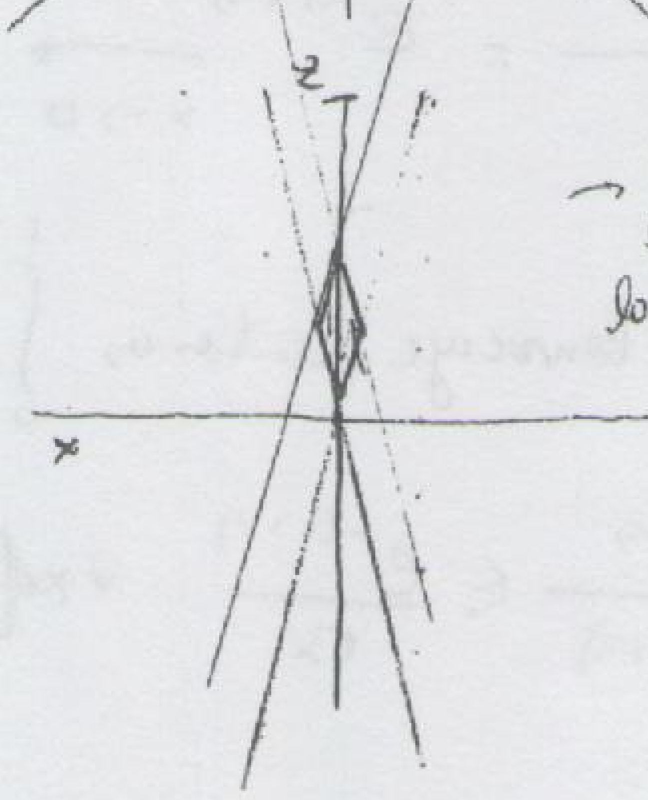
④ $z^2 = 4x^2 + y^2$ $\rightarrow$ "cono"

$(z-2)^2 = 4x^2 + y^2$ $\rightarrow$ el mismo "cono" elevado en $z = 2$.





$z \geq 0$.



→ mal, en realidad las rectas son y $z = 2x + 2$

plano xz

~~$z^2 (z-2)^2$~~

~~$4x^2$~~ ~~$z \geq 0$~~

Cambio de variables (cilíndricas).

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2} r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad 4x^2 + y^2 = r^2.$$

$$D = \left\{ (r,\theta,z) \;/\; \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ r \leq z \leq -r+2 \end{array} \right\}$$

$r \geq 0$, $z \geq 0$

$z^2 = r^2 \Rightarrow |z| = r \rightsquigarrow z = r$ ✓

$(z-2)^2 = r^2 \Rightarrow |z-2| = |r| \rightsquigarrow z = -r+2$

$T(r,\theta,z) = \left(\frac{r\cos\theta}{2} \,;\, r\sin\theta \,;\, z \right)$.

$$|DT(r,\theta,z)| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\cos\theta & -\frac{1}{2} r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} r\cos^2\theta + \frac{1}{2} r\sin^2\theta = \frac{1}{2} r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \underline{\underline{\frac{1}{2} r}}.$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{-r+2} \frac{1}{2} r \, dz\, dr\, d\theta = \frac{2\pi}{2} \int_0^1 \int_r^{-r+2} r\, dz\, dr = \pi \int_0^1 r(-r-(r+2))\, dr \overset{\circledast}{=} \cancel{2\pi \int_0^1 z\, dz = 2\pi \left.\left(\frac{r^2}{2}\right)\right|_0^1} =$$

$-2r^2 - 2r$, $-2r - 2$

$= \cancel{2\pi \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\pi}}$ $\boxed{\cancel{Vol = \pi}}$

$\circledast = \pi \int_0^1 -2r^2 - 2r\, dr$ $= -2\pi$

$\Rightarrow$

Elio Lapitelli

34080541 536/12

3/5

(Ej. 4)

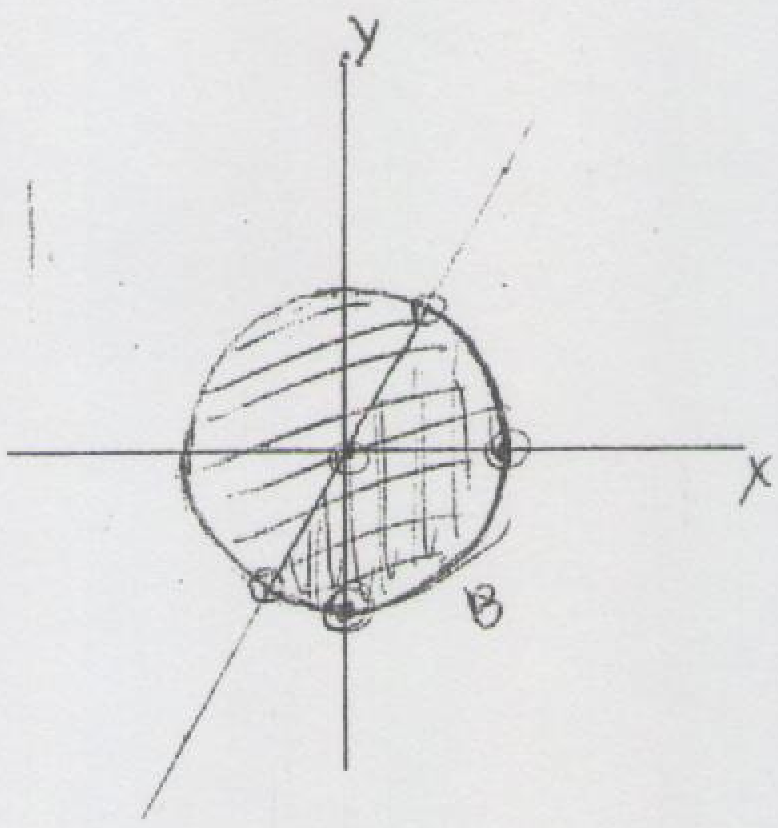
$$= \pi \int_0^1 \int_r^{-r+2} r \, dz \, dr = \pi \int_0^1 r\underbrace{\underbrace{(-r+2-r)}_{-2r+2}}_{-2r^2+2r} \, dr = 2\pi \int_0^1 -r^2 + r \, dr = 2\pi \left(-\frac{r^3}{3} + \frac{r^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{3}\pi}$$

Elio Campitelli
34080541   536/12

4/5

② $f(x,y) = -x^2 + 2y^3 + 3y^2$ $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 1 \wedge y \leq \sqrt{3}x\}$.



f es C^1 y B es compacto (cerrado y acotado), por lo tanto f alcanza mínimo y máximo absolutos en B.

$B°$:

$\nabla f(x,y) = (-2x\,;\ 6y^2 + 6y) \overset{?}{=} (0,0)$. $x = 0$.
$y^2 + y = 0$. $y_1 = 0$
$y(y+1) = 0$ $y_2 = -1$
$y = 1$

$\left.\begin{matrix}(0,0)\\ (0,-1)\end{matrix}\right\}$ puntos críticos.

~~$\sqrt{3}$~~

pero ambos están en ∂B. No hay máx ni mín en $B°$

∂B: Ya tengo $(0,0)$ y $(0,-1)$. Busco si hay otros parametrizando. Además agrego los vértices.

Recta $y = \sqrt{3}x$. $\gamma(t) = t(1,\sqrt{3}) + (0,0) = (t, \sqrt{3}t)$

$(f \circ \gamma)(t) = f(t, \sqrt{3}t) = -t^2 + 2(\sqrt{3}t)^3 + 3(\sqrt{3}t)^2 = -t^2 + 2 \cdot 3^{3/2} t^3 + 9t^2 =$

$= 8t^2 + 2 \cdot 3^{3/2} t^3 = h_1(t)$

$h_1'(t) = 6 \cdot 3^{3/2} t^2 + 16t \overset{!}{=} 0$

$t_1 = 0$ $\gamma(0) = (0,0) \rightarrow$ ya lo tenía.

$t(2 \cdot 3^{5/2} t + 16) = 0$

$t = \frac{-16}{2 \cdot 3^{5/2}} = -\frac{8}{3^{5/2}} = t_2$ $\gamma(-8/3^{5/2}) = \left(-8/3^{5/2}\,;\ \frac{-8}{9}\right) \sim (-0{,}5\,;\ -0{,}9)$

$\left(\frac{-8}{3^{5/2}}\right)^2 + \left(\frac{-8}{9}\right)^2 = \frac{64}{3^5} + \frac{64}{81} = \frac{256}{243} > 1$

$\notin \partial B$

Circ. $r = 1$ $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta \end{cases}$ $g(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

$h_2 = (f \circ g)(\theta) = f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = -\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}^3\theta + 3\operatorname{sen}^2\theta$

$h_2'(\theta) = +2\cos\theta \operatorname{sen}\theta + 6\operatorname{sen}^2\theta \cos\theta + 6\operatorname{sen}\theta\cos\theta \overset{?}{=} 0$

$\cos\theta \operatorname{sen}\theta (8 + 6\operatorname{sen}^2\theta) = 0$.

$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta_1 = \pi/2 \rightarrow \notin \partial B$

$\theta_2 = -\pi/2 \longrightarrow (0,-1) = (x,y)$.

$\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta_3 = 0 \rightarrow (1,0) = (x,y)$

$\theta_4 = \pi \rightarrow \notin \partial B$

$8 + 6\sin^2\theta = 0$.

$\sin^2\theta = -\frac{4}{3}$ X abs.

~~Sa~~

Vértices: $y = \sqrt{3}x \qquad x^2+y^2 = 1$.

$x^2 + 3x^2 = 1$

$4x^2 = 1$

$x = \pm\frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Puntos críticos:

$f\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 3,3 \rightarrow$ máx abs.

$f\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0,7$

$f(0\ ;\ 0) = 0$ | locales?

$f(0\ ;-1) = 1$ |

$f(1\ ,\ 0) = -1 \rightarrow$ mín abs.

~~Correct~~ Como f es C^1 y B es compacto, f alcanza máx y mín absolutos en B. Como estos tienen que ser puntos críticos, entonces tienen que ser alguno de los que tengo.

$$Hf_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 12y+6 \end{pmatrix}$$

$\det(Hf_{(0,0)}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -12 < 0 \Rightarrow$ ensilladura.

$\det|Hf_{(0,-1)}| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 12 > 0 \quad f''_{x^2}(0,-1) < 0 \Rightarrow$ máx local

~~B~~ Conclusión:

$\boxed{\begin{array}{l} (1,0) \text{ es mín absoluto en } B \\ \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ es máx absoluto en } B. \\ (0,-1) \text{ es un máx local en } B. \end{array}}$

7